主题名称	函数曲线的凹凸性	相关知识点	凹凸性、二阶导数
所属课程	高等数学	授课时长	1 学时，45 分钟
授课对象	大一经济类专业	教学资源	多媒体
参考教材 章节位置	《高等数学及其应用》第二版 第 4 章 中值定理与导数的应用 4.5 节 凹凸性与函数作图		

学情分析

本课的教学对象是经济类专业大一年级，教学班级规模 130 人。本次教学在导数学习之后，此时学生对各类函数的性质有了较好的理解。但由于各地区的教育差异及学生文理科的不同，导致学生的基础参差不齐，部分同学对数学有很好的兴趣，能积极探索问题本质及归纳结题技巧；但部分同学数学基础能力较弱，对抽象概念的理解不到位，缺乏对纯数学概念的学习兴趣。

本节讲述的凹凸性结合前面学习的函数的单调性、奇偶性等性质及极值、最值等特殊值，可以使我们对函数的认识更加精确，对于描绘函数的图形有很大的作用。

教学目标

知识技能目标

(1)通过抽象曲线凹凸性的定义，了解凹凸性的背景，建构其认知基础；

(2)通过几何直观体会凹凸性概念的基本思想，从而理解掌握判别凹凸性的几何法，并能用代数法判定凹凸性；

(3)通过定理的证明培养学生知识迁移的能力，以及观察、比较、抽象、概括的能力。

数学方法目标

通过问题驱动式的启发教学以及凹凸性的对比讲解，探究体会曲线凹凸性的几何判定法和代数判定法中所蕴含的数形结合、形象思维与逻辑思维相结合的数学思想方法。

情感态度目标

(1)通过生活实际问题引入曲线凹凸性，让学生认识到数学在实用性方面的力量，感受到数学在哪里，美就在哪里；

(2)通过几何直观抽象概括出凹凸性的概念及其判别法，培养学生勇于探索新知的科学态度，从而激发学生学习数学的兴趣。

教学重点

理解掌握凹凸性的判别方法：利用二阶导数的符号判别曲线凹凸性。

教学难点

凹凸性概念的抽象过程、利用二阶导数判定凹凸性的几何解释和定理证明。

预习任务

函数的单调性反映在图形上，就是曲线的上升或下降。但是，曲线在上升或下降的过程中，还有一个弯曲方向的问题，即凹凸性。曲线凹凸性是函数图形又一重要性态特征，是导数性质的具体应用，对加深理解曲线的几何性质，进一步理解导数的概念及性质有着重要的意义。具体预习任务：

(1)初步了解函数曲线的凹凸性与拐点的定义。

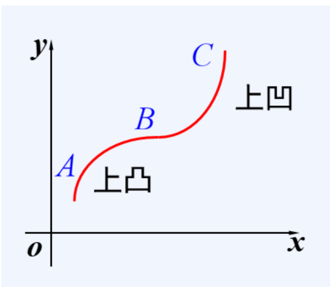
(2)结合单调性，探索凹凸性的判定定理与二阶导数符号情况。

教学内容与过程（六个步骤）

一、创设情境，兴趣导入（2 分钟）

通过赛车手视频和河流、港珠澳大桥等这些生动的实例引导学生注意到画面中勾勒出的线条，将其抽象为曲线 ABC，放入直角坐标系中分析。显然，曲线 AB 和 BC 都是单调递增的，但它们单调递增的弯曲方式有所不同。这说明：仅用单调性来描述曲线的性态是不够的，需要进一步去考察曲线的弯曲方向。

曲线 AB 是向上鼓鼓的，称它是上凸的，简称凸的；曲线 BC 是向下鼓鼓的，称其是上凹的，简称凹的。



设计意图：

创设问题情境，反映数学的应用价值，体会数学无处不在。结合形象思维与逻辑

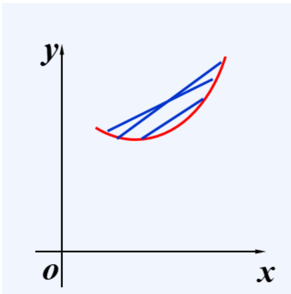
思维，如利用典型的象形文字“凸”和“凹”形容曲线的弯曲方向，培养学生兴趣，激发学习热情。

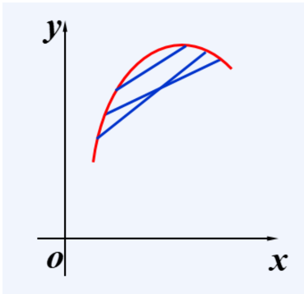
二、几何分析，归纳方法（3 分钟）

将曲线 ABC 以 B 为分割点分成两部分，观察曲线的凹与凸特征。

1. 观察弦与弧的位置关系

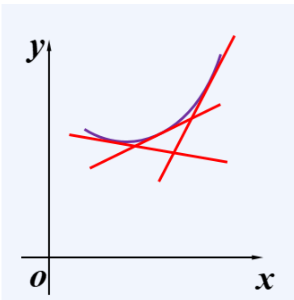
如果曲线上任意两点连线的弦总在所相应弧的上方，那么称曲线是凹的；如果曲线上任意两点连线的弦总在所相应弧的下方，那么称曲线是凸的。

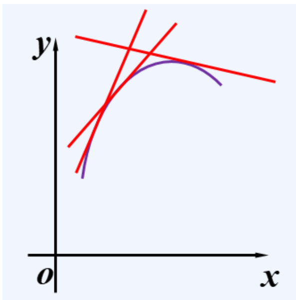




2. 观察曲线与切线的位置关系

假设曲线在所考虑区间上任一点的切线均存在。如果曲线上任意一点的切线均在曲线的下方，那么曲线是凹的；如果切线均在曲线的上方，那么曲线是凸的。





例 1： 判定 $y=x^3$ 的凹凸性。

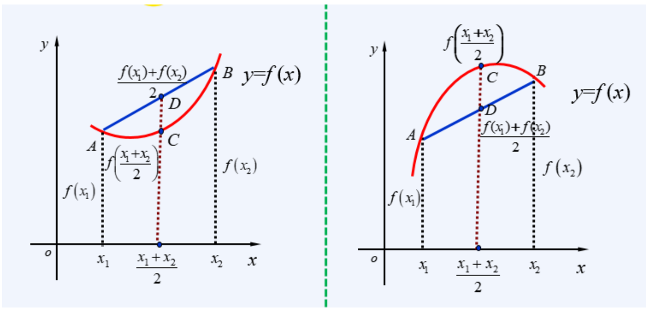
利用凹凸性的以上两种特征，结合图形，得出结论。

设计意图：

通过几何直观和对比观察研究，引导学生探索曲线凹凸性的特征，建构凹凸性的认知基础。但是以上方法确具有局限性（需要曲线已知的情况下），若函数曲线不确定，该如何描绘其凹凸性呢？从而引出下面问题。

三、数形结合，概念讲授（5 分钟）

【问题提出】如何用数学语言来定义曲线的凹凸性呢？



【概念探索】设曲线解析式为 $y=f(x)$ ，在曲线上任取两点 A、B，得弦 AB。设 A、B 两点的横坐标分别是 x_1、x_2 ，在 x 轴上取 x_1、x_2 的中点。对比两张图可以发现，如果曲线是凹的，那么 C 点总在 D 点的下方；如果曲线是凸的，C 点总在 D 点的上方。启发学生通过 C 点和 D 点的位置关系来判别凹凸性。而 C 点和 D 点的横坐标相同，因此可以通过 C 点和 D 点纵坐标的大小关系判别凹凸性。由此可以得到曲线凹凸性的定义。

定义：设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 恒有

$$(1) f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \text{那么称 } f(x) \text{ 在 } I \text{ 上的图形是(向上)凹的;}$$

$$(2) f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \text{那么称 } f(x) \text{ 在 } I \text{ 上的图形是(向上)凸的.}$$

例 1：判定 $y=x^3$ 的凹凸性。

引导学生通过定义，作差比较法来解答，即通过比较曲线上任意两点中点的函数值与这两点函数值的平均值的大小来判别。

设计意图：

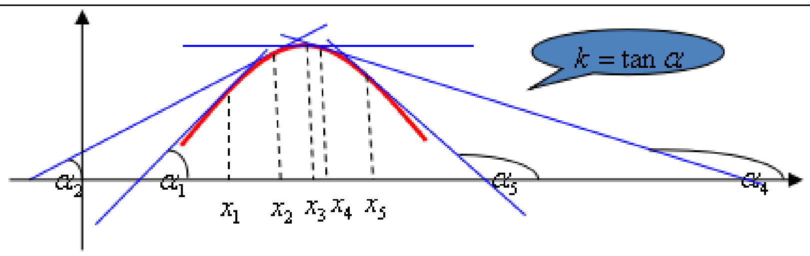
通过对比观察分析，并结合凹凸曲线的几何特征归纳出曲线凹凸性的定义，渗透数形结合思想。

四、连续启发，层层推进（10 分钟）

【问题提出】于一些比较复杂的函数，利用定义去判别凹凸性在计算时往往会出现困难或麻烦，需要寻求更加有效的方法来判别。需要进一步考察曲线的切线。

【思考】如果曲线是凹的，随着自变量 x 的增大，切线的斜率会有什么样的变化呢？

观察呈凸型的曲线的切线



切点横坐标增大⇒切线斜率减小⇒导函数单调递减⇒ $f''(x)<0$

同理，观察呈凹型的曲线的切线，可得

切点横坐标增大⇒切线斜率增大⇒导函数单调递增⇒ $f''(x)>0$

【思考】对比观察切线，逐层发问，采用连续启发式教学进行推导，激发学生兴趣。

问题提出：能否根据函数的二阶导数的符号来判定函数所对应的曲线的凹凸性呢？

凹凸性定理：

设 $f(x)\in C([a,b])$，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数,那么

若 $f''(x)>0, x\in(a,b)$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的；

若 $f''(x)<0, x\in(a,b)$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的。

证明定理：　引导学生利用泰勒公式证明上述定理。

【教学小结】二阶导数大于等于零，这让我们联想到正能量，此时就会出现笑脸，所以曲线是凹的；二阶导数小于等于零，就会让我们联想到负能量，此时就会出现哭脸，所以曲线是凸的。另一方面，**付(负)出(凸)必有回报**(即若函数的二阶导数为负值，则函数曲线是凸的)。

例 1：判定 $y=x^3$ 的凹凸性。

利用定理，即通过判别二阶导数的符号来解答。

设计意图：

(1)通过证明定理，训练和培养学生的逻辑思维能力，使学生寻找新旧知识之间的联系，从而能够更好地理解定理，并形成言之有理，论证有据，治学严谨的素养。

(2)利用笑脸和哭脸来联想记忆结论，从而将形象思维与逻辑思维相结合。

五、拓展深化，强化训练（22 分钟）

拐点定义及求法

定义　设曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$ 处有穿过曲线的切线，且在切点两侧附近曲线凹凸

性不同，这时称点$(x_0,f(x_0))$为曲线 $y=f(x)$的拐点。或者连续曲线上凹弧和凸弧分界点称为拐点。

例 2　判断曲线$y=\sin x$在$(0,2\pi)$内的凹凸性。

解：因为$y'=\cos x$，$y''=-\sin x$. 所以，在$(0,\pi)$上$y''<0$，在$(\pi,2\pi)$上$y''>0$，

　　则曲线$y=\sin x$在$(0,\pi)$上是凸的，在$(\pi,2\pi)$上是凹的。

注：这个结论和通过曲线凹凸性的定义和图像观察出的结果是一致的。

例 3　判断$y=\sqrt[3]{x}$的凹凸性。

解：　当$x\neq 0$时，$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，$y''=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$，$x=0$是不可导点，$y'$，$y''$均不存在。

但在$(-\infty,0)$内，$y''>0$，曲线在$(-\infty,0]$上是凹的；

在$(0,+\infty)$内，$y''<0$，曲线在$[0,+\infty)$上是凸的；

注意：点$(0,0)$是曲线$y=\sqrt[3]{x}$的凹凸弧的分界点，即拐点。

求法　设函数$f(x)$在x_0的附近二阶可导且在x_0点连续，$f''(x)=0$，或$f''(x_0)$不存在。

(1)x_0左右附近$f''(x)$变号，点$(x_0,f(x_0))$为拐点；

(2)x_0左右附近$f''(x)$不变号，点$(x_0,f(x_0))$不是拐点；

例 4　求曲线$y=2x^3+3x^2-12x+14$的凹凸区间及拐点。

【练习】求曲线$y=3x^4-4x^3+1$　的凹凸区间及拐点。

设计意图：

　　巩固利用二阶导数的符号判别曲线的凹凸性，加深对导数概念的理解，为后面函数作图做铺垫。通过例题可以检测学生对知识的掌握情况，找到差距，更进一步巩固和深化新知识，让学生知道数学重在应用，培养学生运用所学知识解决问题的能力，有利于学生养成良好的学习习惯。

六、小结概念，总结方法（3 分钟）

　　1.从几何角度，得出曲线凹凸性的特征；

　　2.给出曲线凹凸性的定义和判别定理；

3.在凹凸性基础上，给出拐点定义及其求法。

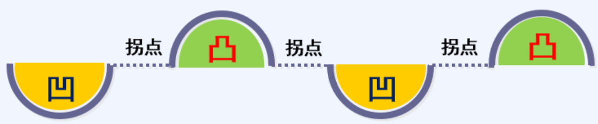
【课后作业】　课本 227 页 1(1)(2)(4)，2

下节预习任务　(1)求函数渐近线；(2)根据微积分基本知识描绘函数形态。

七、板书设计，条理清晰

力求条理清楚，便于学生从整体上认识、理解曲线凹凸性的概念及其判别方法。

曲线特征	几何	定义	二阶导数
凹	弦在弧上方 切线在曲线下方	$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$	$f''(x)\ge 0$
凸	弦在弧下方 切线在曲线上方	$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$	$f''(x)\le 0$



教学总结

本课通过创设情境，由赛车手的运动轨迹以及港珠澳大桥等实例的引入，并将其抽象为直角坐标系中的曲线，引出刻画曲线弯曲方向的凹凸概念。采用连续启发式教学，引导学生对凹凸曲线进行对比观察分析，激发学生兴趣，促进学生思考。

在本次教学中，以问题驱动为模式，通过层层提出问题，让学生在解决问题的思维活动中，自主发现凹凸性与二阶导数之间的联系，避免学生产生畏难情绪。同时利用凹凸性的性质、定义和定理解答同一道例题，巩固知识，并突出对凹凸性概念的理解和分析，渗透数形结合数学思想方法之重要。

在教学中将形象思维与逻辑思维相结合，分别以“笑脸、哭脸”类比曲线的“凹与凸”，方便学生记忆二阶导数判别法的结论。

通过介绍港珠澳大桥，因其超大的建筑规模、空前的施工难度以及顶尖的建造技术而闻名世界，是现代世界七大奇迹之一。港珠澳大桥是我们国家的骄傲，是见证我们民族富强的象征，参与建造的所有人都值得我们每个人去尊重，并记住他们。这也是结合本节内容，对同学们进行思政教育的切入口。

本课结束时回到开篇赛车手的凹凸路径，并将其升华到人生弯路的哲学意义，结合赛车的“弯道超越”启发学生在弯道上超越，必然会精彩自己的凹凸人生。