多元函数微分

第一节 多元函数的极限与连续

知识点一 计算二重极限的常用方法

1. 通过恒等变形，将函数转化为极限点处的连续函数求解；
2. 作变量代换/极坐标变换（令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$），将二重极限转化为一元极限；
3. 结合夹逼准则、重要极限、等价无穷小代换、洛必达法则综合计算。

典型例题

例 1 利用夹逼准则证明极限

证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$

证明：由基本不等式 $x^2+y^2\geq 2|xy|$，可得：

$$0\leq\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leq\frac{x^2y^2}{2|xy|}=\frac{|xy|}{2}$$

又 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|xy|}{2}=0$，根据夹逼准则，得：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0.$$

补充公式：$\lim\limits_{u\to0^+}u^u=\lim\limits_{u\to0^+}e^{u\ln u}=\lim\limits_{u\to0^+}e^{\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}}=\lim\limits_{u\to0^+}e^{-u}=1.$

例 2 幂指型二重极限

求极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解：对原式变形：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[\left(x^2+y^2\right)^{x^2+y^2}\right]^{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}.$$

由 $\lim\limits_{u\to0^+}u^u=1$ 以及例 1 结论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$，因此：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}=1^0=1.$$

例 3 先求单极限，再求累极限。

设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{y}{\arctan x}\,(x>0,y>0)$，求：

(1) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$；(2) $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$.

解：

(1)

$$g(x)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{\dfrac{1}{y}+x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}.$$

(2) 对表达式通分，连续使用洛必达法则：

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\cdot\arctan x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}-1+2\pi x}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}+2\pi}{2}=\pi$$

例 4 讨论分段函数在 $(0,0)$ 处的连续性。

设函数：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & ?(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

解法 1（等价无穷小+夹逼准则）

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 为初等函数，必然连续；

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，利用等价无穷小 $\sin u\sim u\,(u\to0)$：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin\left(x^2y\right)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

又 $0\le\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{|x|}{2}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{2}=0$ 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，函数在 $(0,0)$ 处连续。

解法 2（极坐标变换）

令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$\rho\to0$：

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\sin\left(\rho^3\cos^2\theta\sin\theta\right)}{\rho^2}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2}=0.$$

极限等于函数值，函数在 $(0,0)$ 处连续。

知识点二 否定二重极限存在的常用方法

1. 取单条特殊路径，证明该路径下极限不存在；
2. 取两条及以上不同路径，证明不同路径的极限值不相等。

典型例题

例 5 判断极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 是否存在。

解：

取路径 $y=kx^3$（k 为任意常数），代入得：

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx^3}}\frac{x^3\cdot kx^3}{x^6+\left(kx^3\right)^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^6}{x^6+k^2x^6}=\frac{k}{1+k^2}.$$

极限值随常数 k 变化，因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在。

例 6 分段函数连续性判定。

设：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

解

1. 沿射线 $x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha\ (t\to0)$ 趋于 $(0,0)$：

$$\lim_{t\to0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim_{t\to0}\frac{t\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=0=f(0,0).$$

2. 取路径 $y=kx^2$：$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx^2}}\dfrac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\dfrac{k}{1+k^2}.$

极限与 k 有关，因此函数在 $(0,0)$ 处不连续。

例 7 求使函数在 $(0,0)$ 连续的正整数 n，设：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)^n}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}.$$

解：

$$0\le |f(x,y)|=\left|(x+y)^{n-2}\right|\cdot\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}.$$

由不等式 $0\le\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\le 2$，可知：

当$n>2$时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)^{n-2}=0$，此时 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$。

结论：满足条件的正整数 $n=3,4,5,\dots$

第一节 课后作业

1. 证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$.

2. 求极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

3. 设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}\ (x>0,y>0)$，求：

   (1) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$；(2) $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$.

4. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性。

5. 证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在。

6. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，证明：函数沿过 $(0,0)$ 射线极限为 0，但在 $(0,0)$ 处不连续。

7. 求正整数 n，使得 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)^n}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，在 $(0,0)$ 处连续。

第二节 多元函数的偏导数与全微分

知识点一 一阶偏导数求解方法

1. 定义法（适用于分段点、特殊点）

$$f_{x'}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},f_{y'}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

2. 常规求导法

- 求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$：将 y 视作常数，对 x 求一元导数；
- 求 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$：将 x 视作常数，对 y 求一元导数。

典型例题

例 1 概念选择题

若 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)},\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$ 都存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处（**D**）

A. 极限存在但不一定连续
B. 连续但不一定极限存在
C. 极限存在且连续
D. 极限不一定存在，也不一定连续

例 2 偏导数存在性判断

已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，判断 $f_x(0,0),f_y(0,0)$（**B**）

A. $f_x(0,0),f_y(0,0)$ 都存在

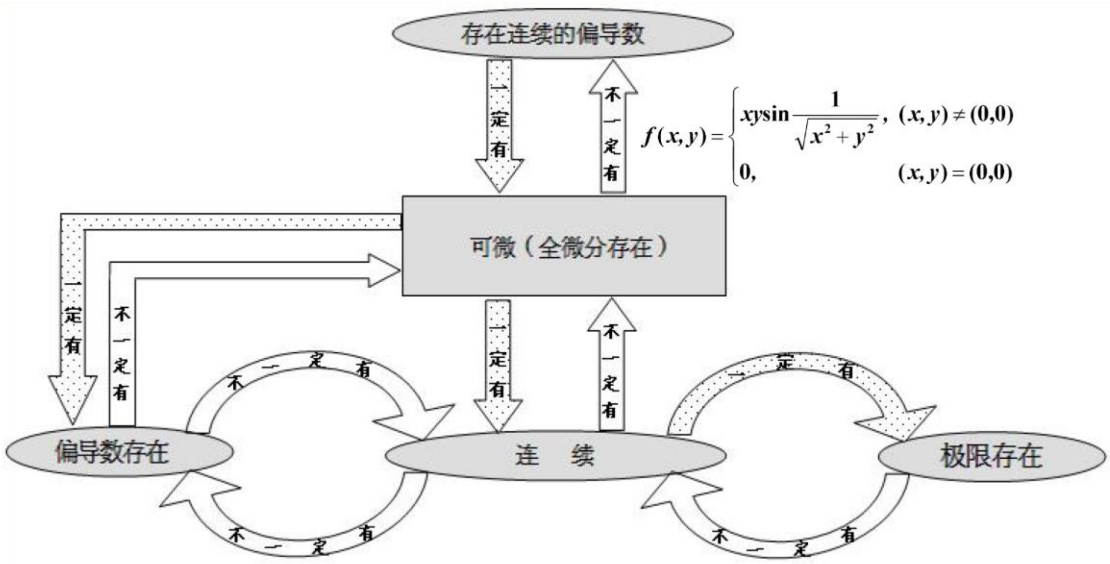
B. $f_x(0,0)$ 不存在，$f_y(0,0)$ 存在

C. $f_x(0,0),f_y(0,0)$ 都不存在

D. $f_y(0,0)$ 不存在，$f_x(0,0)$ 存在

知识点二 连续、偏导数、可微的关系

核心推导链：



典型例题

例 3 讨论 $(0,0)$ 处连续性、偏导数、可微性。

设：

$$f(x,y)=\begin{cases} y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

解：

1. 连续性

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0),$$

函数在 $(0,0)$ 处连续。

2. 偏导数

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\arctan\frac{1}{|y|}=\frac{\pi}{2},$$

偏导数存在。

3. 可微性

记 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\omega=\Delta f-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y$，

$$\lim_{\rho\to 0^+}\frac{\omega}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{y}{\rho}\left(\arctan\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

即 $\omega=o(\rho)$，函数在 $(0,0)$ 处可微。

例 4 可微但偏导数不连续（经典例题）

设：

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases},$$

验证：函数在原点连续、偏导数存在、可微，但偏导数在原点不连续。

例 5 综合讨论连续性、偏导数、可微性

设：

$$f(x,y)=\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}.$$

知识点三 多元复合函数偏导数（链式法则）

典型例题

例 6 一元复合函数（外层为二元函数）

设 $f(x,y)$ 可微，$f(1,2)=2, f_{x'}(1,2)=3, f_{y'}(1,2)=4$，令 $\varphi(x)=f(x,f(x,2x))$，

求 $\varphi'(1)$。

解：

由链式法则：$\varphi'(x)=f_{x'}\big(x,f(x,2x)\big)+f_{y'}\big(x,f(x,2x)\big)\cdot\big(f_{x'}(x,2x)+2f_{y'}(x,2x)\big)$,

代入 $x=1$：$\varphi'(1)=f_{x'}(1,2)+f_{y'}(1,2)\cdot\big(f_{x'}(1,2)+2f_{y'}(1,2)\big)=3+4\times(3+8)=47$.

例 7 复合函数求导+幂函数求导

设 $f(x,y)$ 可微，$f(1,1)=1, f_{x'}(1,1)=2, f_{y'}(1,1)=3$，$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，求

$\dfrac{d\left[\varphi^3(x)\right]}{dx}\Big|_{x=1}$。

解：

由一元求导法则：$\dfrac{d\left[\varphi^3(x)\right]}{dx}=3\varphi^2(x)\cdot\varphi'(x)$

$\varphi'(x)=f_{x'}\big(x,f(x,x)\big)+f_{y'}\big(x,f(x,x)\big)\cdot\big(f_{x'}(x,x)+f_{y'}(x,x)\big)$.

代入 $x=1$：$\dfrac{d\left[\varphi^3(x)\right]}{dx}\Big|_{x=1}=3\cdot1^2\cdot\big[2+3\times(2+3)\big]=51.$

例 8 方程组型复合函数求导

已知 $y=f(x,t),F(x,y,t)=0$，$f(x,t),F(x,y,t)$ 一阶偏导数连续，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解：

分别对 x 求导：$\dfrac{dy}{dx}=f_{x'}+f_{t'}\cdot\dfrac{dt}{x}$，$F_{x'}+F_{y'}\cdot\dfrac{dy}{dx}+F_{t'}\cdot\dfrac{dt}{dx}=0$.

联立消去 $\dfrac{dt}{dx}$，解得：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f_{x'}F_{t'}-f_{t'}F_{x'}}{F_{t'}+f_{t'}F_{y'}}$.

例 9 多层复合函数求偏导

设 $z=f\left(\dfrac{\sin x}{y},\dfrac{y}{\ln x}\right)$，$f$ 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

解：

记 $f_{1'},f_{2'}$ 为对第一、二个中间变量的偏导数：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\cos x}{y}\cdot f_{1'}-\dfrac{y}{x\ln^2 x}\cdot f_{2'}$

例 10 混合复合函数求偏导

设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，$f$, g 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_{1'}+\dfrac{1}{y}f_{2'}-\dfrac{y}{x^2}g'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_{1'}-\dfrac{x}{y^2}f_{2'}+\dfrac{1}{x}g'$.

例 11 坐标变换类偏导证明

设 $z=f(x^2-y^2,\cos xy)$，$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，证明：

$$\cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta}=2x\frac{\partial z}{\partial u}-y\sin xy\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$

（令 $u=x^2-y^2,v=\cos xy$，分别求出 $\dfrac{\partial z}{\partial r},\dfrac{\partial z}{\partial\theta}$ 代入化简即可）

例 12 结合罗尔定理的证明题

$f(x,y)$ 一阶偏导数连续，且 $f(0,1)=f(1,0)$，证明：单位圆周上至少存在两点满足 $y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$.

解：令参数方程 $x=\cos t,y=\sin t$，设 $g(t)=f(\cos t,\sin t)$，

$g(t)$ 一阶连续可导，且 $g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(2\pi)$。

在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ 分别使用罗尔定理，存在 ξ_1,ξ_2 使得 $g'(\xi)=0$。

$g'(t)=-\sin t\cdot f_x+\cos t\cdot f_y$.

代入得 $yf_x-xf_y=0$，命题得证。

例 13 球面坐标变换证明

设 $u=f(x,y,z)$，满足 $\frac{f_{x'}}{x}=\frac{f_{y'}}{y}=\frac{f_{z'}}{z}$，证明：$u$ 仅为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的函数。

解：令 $x=r\cos\theta\sin\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\varphi$，

计算得 $\frac{\partial u}{\partial\theta}\equiv 0,\frac{\partial u}{\partial\varphi}\equiv 0$，故 u 只与 r 有关。

知识点四 隐函数的偏导数

1. 单个方程隐函数：设 $F(x,y,z)=0$ 确定 $z=z(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_{x'}}{F_{z'}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_{y'}}{F_{z'}}.$$

例 14 设 $u=f\left(x,y,z\right)$ 有连续偏导数，且 $z=z\left(x,y\right)$ 由 $xe^x-ye^y=ze^z$ 确定，求 du.

解：

令 $F(x,y,z)=xe^x-ye^y-ze^z$，则：

$F_{x'}=(x+1)e^x, F_{y'}=-(y+1)e^y, F_{z'}=-(z+1)e^z$,

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x+1}{z+1}e^{x-z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}$,

$\frac{\partial u}{\partial x}=f_{x'}+f_{z'}\cdot\frac{x+1}{z+1}e^{x-z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f_{y'}-f_{z'}\cdot\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}$,

全微分：

$$du=\left(f_{x'}+\frac{x+1}{z+1}e^{x-z}f_{z'}\right)dx+\left(f_{y'}-\frac{y+1}{z+1}e^{y-z}f_{z'}\right)dy.$$

例 15 隐函数求微分与高阶偏导

$z=z(x,y)$ 由 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 确定（$\varphi'\neq 1$），求：

(1) dz. (2) 记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

解：

(1) 两边同时微分：

$2xdx+2ydy-dz=\varphi'(dx+dy+dz)$,

整理得：

$dz=\dfrac{1}{1+\varphi'}\left[(2x-\varphi')dx+(2y-\varphi')dy\right]$ (2) $u=\dfrac{2}{1+\varphi'}$， $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{2(1+2x)\varphi''}{(1+\varphi')^3}$.

例 16 方程组确定隐函数

方程组 $\begin{cases}x=(t+1)\cos z\\ y=t\sin z\end{cases}$ 确定 $z=z(x,y),t=t(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

解：

两边对 x 求偏导，联立方程组解得：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-\tan^2 z}{y+x\tan^3 z}$.

例 17 设 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$. 设 $u=x$，$v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$，$\varphi=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}$. 对函数

$\varphi=(u,v)$，求证 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\equiv 0.$

知识点五 高阶偏导数

1. 逐阶求导，规则同一阶偏导数；

2. 重要定理：若二阶混合偏导数连续，则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$（顺序可交换）。

典型例题

例 18 混合偏导数不相等例题

设：$f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，求 $f_{xy}''(0,0), f_{yx}''(0,0)$.

解：利用偏导数定义计算得，

$f_{xy}''(0,0)=-1,\quad f_{yx}''(0,0)=1$.

例 19 设 $u=f\left(z\right)$，而 z 是由方程 $z=x+y\varphi\left(z\right)$ 所确定，φ,f 都是任意次可微的函数，则 $\dfrac{\partial^n u}{\partial y^n}=\dfrac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}\left\{\left[\varphi\left(z\right)\right]^n\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\}$.

例 20 二阶偏导数等式选择题

设 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，$\varphi$ 二阶可导，ψ 一阶可导，则（**B**）

A. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　B. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　C. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　D. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

例 21

设 $u(x,y)$ 有二阶连续偏导数，证明：$u(x,y)=f(x)g(y)\,(u\neq 0)$ 的充要条件为

$u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

例 22

设 g 二阶可导，f 具有二阶连续偏导数，$z=g\big(xf(x+y,2y)\big)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

例 23

设 $u=f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$，满足

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ 求 $f(t)$ 表达式。

例 24
设变换

$u=x+a\sqrt{y},v=x+2\sqrt{y}$ 将方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求 a.

例 25

设 $z=f(x,y)$ 二阶连续偏导，$\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$，证明：$f(x,y)=C$ 为直线的充要条件

$f_{xx''}(f_{y'})^2-2f_{x'}f_{y'}f_{xy''}+f_{yy''}(f_{x'})^2=0$.

例 26

设 $z=f(x,y)$ 二阶连续偏导，$f_{x'}\neq 0$，满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$ $x=x(y,z)$

由 $z=f(x,y)$ 确定，求证：$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2=0$.

第二节　多元函数的偏导数与全微分 作业题
例 1

若 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ 都存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处（**D**）

A. 极限存在但不一定连续
B. 连续但不一定极限存在
C. 极限存在且连续
D. 极限不一定存在，也不一定连续

例 2

已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则（**B**）

A. $f_x(0,0),f_y(0,0)$ 都存在

B. $f_x(0,0)$ 不存在，$f_y(0,0)$ 存在

C. $f_x(0,0),f_y(0,0)$ 都不存在

D. $f_y(0,0)$ 不存在，$f_x(0,0)$ 存在

例 3
讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases} y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数与可微性。

例 4
验证

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$ 在原点连续、偏导数存在且可微，但偏导数在原点不连续。

例 5
讨论

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$ 在原点的连续性、偏导数、可微性、偏导数连续性。

例 6

设 $f(x,y)$ 可微，$f(1,2)=2, f_{x'}(1,2)=3, f_{y'}(1,2)=4$，$\varphi(x)=f\big(x,f(x,2x)\big)$，求 $\varphi'(1)$。

例 7

设 $f(x,y)$ 可微，$f(1,1)=1, f_{x'}(1,1)=2, f_{y'}(1,1)=3$，$\varphi(x)=f\big(x,f(x,x)\big)$，求 $\left.\dfrac{d\big[\varphi^3(x)\big]}{dx}\right|_{x=1}$.

例 8

已知 $\begin{cases} y=f(x,t) \\ F(x,y,t)=0 \end{cases}$，$f$, F 一阶偏导连续，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

例 9

设 $z=f\left(\dfrac{\sin x}{y},\dfrac{y}{\ln x}\right)$，$f$ 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

例 10

设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，$f,g$ 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

例 11

设 $f(u,v)$ 一阶连续偏导，$z=f(x^2-y^2,\cos xy)$，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，证明：

$$\cos\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta}=2x\frac{\partial z}{\partial u}-y\sin xy\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

例 12

设 $f(x,y)$ 一阶连续偏导，$f(0,1)=f(1,0)$，证明：单位圆周上至少存在两点满足 $y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$.

例 13

设 $u=f(x,y,z)$ 可微，$\dfrac{f_{x'}}{x}=\dfrac{f_{y'}}{y}=\dfrac{f_{z'}}{z}$，证明：$u$ 仅为 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的函数。

例 14

设 $u=f(x,y,z)$ 连续偏导，$z=z(x,y)$ 由 $xe^x-ye^y=ze^z$ 确定，求 du。

例 15

设 $z=z(x,y)$ 由 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 确定，其中 φ 具有二阶可导且 $\varphi'\neq 1$。

(1) 求 dz，

(2) 记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

例 16

设 z 由 $\begin{cases}x=(t+1)\cos z\\ y=t\sin z\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

例 17

设 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$，作变换 $u=x, v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}, \varphi=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}$，求证：$\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\equiv 0$.

例 18

设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 求 $f_{xy''}(0,0), f_{yx''}(0,0)$.

例 19

设 $u=f(z)$，$z=x+y\varphi(z)$，φ, f 任意阶可微，证明 $\dfrac{\partial^n u}{\partial y^n}=\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^n\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\}$.

例 20

设 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$ φ 二阶可导，ψ 一阶可导，则（**B**）

A. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ B. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ C. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ D. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

例 21 充要条件证明

命题：设 $u(x,y)$ 有二阶连续偏导数且 $u\neq 0$，则

$$u(x,y)=f(x)g(y)\Leftrightarrow u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.$$

例 22 复合函数二阶混合偏导计算

已知 $z=g\left(xf(x+y,2y)\right)$，$g$ 二阶可导，f 二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

例 23 由偏微分方程求函数表达式

设 $u=f\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$，满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

例 24 变量代换确定参数 a.

设变换 $\begin{cases} u = x + a\sqrt{y} \\ v = x + 2\sqrt{y} \end{cases}$，将方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$，求 a.

例 25 隐函数为直线的充要条件

设 $f(x,y)$ 二阶连续偏导，$f_y{}' \neq 0$，证明：$f(x,y) = C$ 表示直线的充要条件：

$$f_{xx}{}''(f_y{}')^2 - 2f_x{}'f_y{}'f_{xy}{}'' + f_{yy}{}''(f_x{}')^2 = 0.$$

例 26 隐函数偏导等式证明

设 $z = f(x,y)$ 二阶连续偏导，$f_x{}' \neq 0$，满足：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

$x = x(y,z)$ 由 $z = f(x,y)$ 确定，求证：

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z}\right)^2 = 0.$$

第三节 多元函数微分学的应用

知识点一 多元函数极值与最值

1. 极值求解：二元函数极值充分条件
2. 最值求解：比较驻点、偏导不存在点、边界点函数值

例 1

$f(x,y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$，在 $\left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$ 处取（**B**）

A. 极大值 $-\dfrac{e}{2}$ B. 极小值 $-\dfrac{e}{2}$ C. 没有极值 D. 极小值 e

解：$\begin{cases} f_{x'} = e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0 \\ f_{y'} = e^{2x}(2y + 2) = 0 \end{cases}$ 驻点 $P\left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$，

$A = f_{xx''}(P) = 2e, B = f_{xy''}(P) = 0, C = f_{yy''}(P) = 2e \ AC - B^2 = 4e^2 > 0, A > 0$，

极小值点，极小值 $f\left(\frac{1}{2},-1\right)=-\frac{e}{2}$。

例 2

设 $z=z(x,y)$ 由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定，求极值点与极值。

解：两边求偏导

$$\begin{cases} 2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ -6x+20y-2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases} \quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-3y}{y+z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-3x+10y-z}{y+z},$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$，得 $x=3y,z=y$，代入原方程得驻点 $(9,3,3),(-9,-3,-3)$.

二阶偏导计算：

$A=z_{xx''}(9,3,3)=\frac{1}{6},B=z_{xy''}(9,3,3)=-\frac{1}{2},C=z_{yy''}(9,3,3)=\frac{5}{3}\ AC-B^2=\frac{1}{36}>0,A>0$

$(9,3)$ 为极小值点，极小值 $z=3$；

$(-9,-3)$ 为极大值点，极大值 $z=-3$.

例 3

设 $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$，求极值。

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-2x(x^2-y^2-1)e^{-x^2-y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y(x^2-y^2+1)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2(2x^4-2x^2y^2-5x^2+y^2+1)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xy(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2(2y^4-2x^2y^2-5y^2+x^2+1)e^{-x^2-y^2}$$

驻点：$(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0)$

1. $(0,0)$：$A=2,B=0,C=-2,AC-B^2=-4<0$，非极值点；

2. $(0,\pm1)$：$A=4e^{-1},B=0,C=4e^{-1},AC-B^2>0,A>0$，极小值 $-e^{-1}$；

3. $(\pm 1,0)$： $A=-4e^{-1}, B=0, C=-4e^{-1}, AC-B^2>0, A<0$，极大值 e^{-1}.

例 4

设 $f(x,y)$ 二阶连续偏导，

$f(x,y)=1-x-y+o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)$ $g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$，证明 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取极值，并判断类型、求极值。

解：由全微分定义：$f(1,0)=0, f_1'(1,0)=f_2'(1,0)=-1$。

$g_x'(0,0)=g_y'(0,0)=0$ $A=g_{xx}''(0,0)=-2, B=g_{xy}''(0,0)=-1, C=g_{yy}''(0,0)=-2$

$AC-B^2=3>0, A<0$ $(0,0)$ 为极大值点，极大值 $g(0,0)=0$。

例 5

设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 邻域连续，

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy^2}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=1$ 证明：$(0,0)$ 是驻点且为极小值点。

证明：利用等价无穷小 $1-\cos u\sim\dfrac{1}{2}u^2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy^2}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}=1$ $f(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2+\left(\dfrac{1}{2}+x\right)y^2+o(x^2+y^2)$,

$f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\quad f_y'(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$ 故 $(0,0)$ 为驻点；原点邻域内 $f(x,y)>f(0,0)$，为极小值点。

例 6

证明：当 $0<x<1, 0<y<+\infty$ 时，$ey(1-x)<x^{-y}$.

证明：令 $f(x,y)=yx^y(1-x)$，求驻点满足

$\begin{cases} f_x'=yx^{y-1}(y-xy-x)=0\\ f_y'=x^y(1-x)(1+y\ln x)=0\end{cases}$ 得 $y(1-x)=x, x^y=e^{-1}$.

$A=f_{xx}''=-(y+1)yx^{y-1}<0,\quad B=f_{xy}''=e^{-1},\quad C=f_{yy}''=e^{-1}(1-x)\ln x\ AC-B^2>0$,

驻点为最大值点，$f(x,y)<e^{-1}$，即 $y(1-x)x^y<\dfrac{1}{e}$，整理得 $ey(1-x)<x^{-y}$.

例 7

证明：$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 在约束 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 下的最值为方程

$k^2-(Aa^2+Cb^2)k+(AC-B^2)a^2b^2=0$ 的根。

证明：构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+\lambda\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2\left(A-\frac{\lambda}{a^2}\right)x+2By=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=2Bx+2\left(C-\frac{\lambda}{b^2}\right)y=0$$

齐次方程组有非零解，系数行列式为 0：

$\left(A-\dfrac{\lambda}{a^2}\right)\left(C-\dfrac{\lambda}{b^2}\right)-B^2=0$ 展开即得所证方程，λ 为函数最值。

知识点二 条件极值

求解方法：拉格朗日乘数法；根据实际意义判定最值类型。

第三节　多元函数微分学应用 作业题

例 1　已知 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$，则在 $\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$ 处取（　）

A. 极大值 $-\dfrac{e}{2}$　B. 极小值 $-\dfrac{e}{2}$　C. 没有极值　D. 极小值 e

例 2

设 $z=z(x,y)$ 由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定，求极值点与极值。

例 3

设 $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$，求函数极值。

例 4

设 $f(x,y)$ 二阶连续偏导，$f(x,y)=1-x-y+o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)$，

$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$，证明 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取极值，判断类型并求极值。

例 5

设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 邻域连续，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy^2}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=1$，证明：$(0,0)$ 是驻点且为极小值点。

例 6

证明：$0<x<1,0<y<+\infty$ 时，$ey(1-x)<x^{-y}$。

例 7

证明：$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$ 在 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 下的最值是方程

$k^2-(Aa^2+Cb^2)k+(AC-B^2)a^2b^2=0$ 的根。

真题讲解

一、基本概念判断类

题型 1 多元函数基本关系判断题

考察二元函数 $z=f(x,y)$，定义域 $(x,y)\in D$，判断下列结论正误：

(a) 若 $f(x,y)$ 在 D 上偏导数存在，则 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

(b) 若 $f(x,y)$ 在 D 上偏导数存在，则 $f(x,y)$ 在 D 上可微.

(c) 若 $f(x,y)$ 在 D 上可微，则 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

(d) 若 $f(x,y)$ 在 D 上可微，则 $f(x,y)$ 在 D 上偏导数存在.

设 $f(x,y)$ 是连续函数，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-x^2y^2}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=6$，则 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点。

题型 2 函数连续性、偏导数、可微性选择题

2. 判断函数 $f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0, \\ 0, \qquad\qquad x^2+y^2\neq 0, \end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处（　　）

(A) 可微

(B) 连续且 $f_y'(0,0)=0.$

(C) $f_x'(0,0)=0$, $f_y'(0,0)$ 不存在

(D) $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 不存在

已知 $z=f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4}, x^2+y^2\neq 0 \\ 0, \qquad\quad x^2+y^2\neq 0 \end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处连续且偏导存在。

二、全微分与一阶偏导数计算

题型 1 由函数关系式求全微分

设函数 $f(x,y)$ 可微，且满足 $f(x+1,\mathrm{e}^x)=x(1+x)^2$，则 $\mathrm{d}f(1,1)=$（　　）

(A) $\mathrm{d}y$　　(B) $\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$　　(C) $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$　　(D) $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

题型 2 抽象复合函数求导

设 $f(x,y)$ 具有连续的偏导数，$g(x)$ 和 $h(x)$ 均连续可导，

$z=f\left(xy,g\left(\dfrac{y}{x}\right)+h\left(xy\right)\right)$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=($　　　　$).$

题型 3 一元复合函数求导

已知 $f(u,v)$ 具有连续的偏导数，满足 $f(0,0)=1$，$\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}+\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}=\dfrac{u+v}{2}$,

令 $y(x)=\mathrm{e}^x f(x,x)$，求 $y(x)=$（　　　　）.

题型 4 三元复合函数求全微分

设 $u=f(x,y,z)$ 是可微函数，$y=x^x$，$z=z\left(x,y\right)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=16$ 确定的隐函数，求 $u=f(x,y,z)$ 的全微分 $\mathrm{d}u$.

题型 5 复合函数+隐函数求微分

设 $u=f(x,y,z)$ 的全微分存在，其中 $y=y(x)=x^x$,， z 由方程 $x+y+z=1$ 确定，求全微分 $\mathrm{d}u$.

三、二阶偏导数、变量代换计算

题型 1 变量代换二阶偏导计算

设 $u=x+y$，$v=x-y$，$w=xy-z$，$w=w(u,v)$, $z=z(x,y)$ 具有连续二阶偏导数，且满足等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 计算 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}$.

题型 2 极坐标变换偏导计算

设 $u(x,y)$ 二阶连续可导, 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$.

设 $x=\mathrm{e}^u\cos v$，$y=\mathrm{e}^u\sin v$，$z=uv$, 计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

题型 3 二阶偏微分方程求解

设二元函数 $u(x,y)$ 在第一象限内具有二阶连续偏导数，结合已知二阶偏微分条件，求 u 的表达式。

题型 4 三元函数偏导数计算

设三元函数 $u(x,y,z)=z^{x^y}$，求 $\mathrm{d}u$.

四、隐函数相关习题

题型 1 隐函数单调性与极限

设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^{-y}-\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-y+x=1$ 确定的隐函数。

(1) 证明：$y(x)$ 是单调增加的函数；

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x)$.

题型 2 方程组型隐函数求导

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y=F(x,z)$ 和 $G(x,y,z)=0$ 所确定，其中函数 F 和 G 连续可导，且满足 $\dfrac{\partial G}{\partial z}\neq 0$, $\dfrac{\partial G}{\partial z}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial G}{\partial y}\neq 0$, 求导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

五、函数连续性与间断点

设 $F(x,t)=\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}},(x-1)(t-1)>0,x\neq t,$ 定义 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}F(x,t)$，讨论 $f(x)$ 的连续性；若存在间断点，对间断点进行分类。

六、极值与最值问题

题型 1 无条件极值选择题

可微函数 $z=f(x,y)$ 的微分为 $dz=xy(8-3x-2y)dx+x^2(4-x-2y)dy$，则（　）

(A) $f(2,1)$ 为极小值　(B) $f(2,1)$ 为极大值　(C) $f(2,1)$ 不是极值

(D) 无法判断 $f(2,1)$ 是否是极值

题型 2 闭区域上函数最值

设连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=x^2+y^2-\dfrac{3}{8}x\iint\limits_{D_1}f(x,y)dxdy-\dfrac{2}{\pi}y\iint\limits_{D_2}f(x,y)dxdy,$

其中 $D_1=\{(x,y)|-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$，$D_2=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le 1\}$，求函数 $f(x,y)$ 在区域 $x^2+y^2\le 1$ 上的最值。

七、证明题

题型 1 条件极值与无条件极值辨析

设 $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$，证明：

(1) 对于任意常数 k，$f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $y=kx$ 下的极小值；

(2) $f(0,0)$ 不是二元函数 $f(x,y)$ 自身的极小值。

题型 2 偏导恒等式证明

已知偏微分方程 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$，作变换 $u=x$，$v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$，

$F(u,v)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}$，计算：$\dfrac{\partial F}{\partial u}$.

题型 3 拉普拉斯方程求解证明

设 $u=f(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，满足拉普拉斯方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$,结合极限条件求解 $f(x)$ 的表达式。