

约束经济优化问题

设 $Q = f(x, y)$ 表示企业生产某种产品的生产函数，其中 Q 表示生产该产品的产量， x, y 为生产产品时两种要素的投入量，记产品的价格为 P ，两种要素的单价为 p_1, p_2 ，则

收入函数为： $R(x, y) = PQ = Pf(x, y)$ ；

成本函数为： $C(x, y) = p_1x + p_2y$ ；

利润函数为：

$$L(x, y) = R(x, y) - C(x, y) = Pf(x, y) - p_1x - p_2y$$

因此，生产者最优化行为就是寻求最优生产要素的投入组合使其产出量最大。

例7 (成本固定时产出最大化问题) 某企业生产一种产品, 两种要素的投入量分别为 x, y , 价格分别为25元和15元, 生产函数为 $Q = 30xy$. 假若此企业生产该产品的资金预算为5000元, 问如何安排生产才能使产量达到最高? 最高产量为多少?

解 依题投入成本为 $25x + 15y = 5000$, 即 $5x + 3y = 1000$, 故本问题是求:

在 $5x + 3y = 1000$ 条件下 $Q = 30xy$ 何时达到最大的条件极值问题.

$$\text{设 } F(x, y, \lambda) = 30xy + \lambda(1000 - 5x - 3y)$$

建立联立方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 30y - 5\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 30x - 3\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 1000 - 5x - 3y = 0 \end{cases}$$

根据问题的实际意义知当两种要素的投入量分别为 100、 $\frac{500}{3}$ 时，产品的产量最高，最高产量为：

$$Q = f\left(100, \frac{500}{3}\right) = 500000.$$