五、常微分方程典型经济应用案例

常微分方程作为描述动态变化过程的核心数学工具，在经济分析、政策制定、企业决策等领域具有广泛应用。

案例一：简单经济增长模型

问题背景

某地区经济总量（GDP）的增长速度与当前经济总量成正比，同时受政策扶持带来的固定增长效应影响。设经济总量为 y(t)（单位：亿元），时间 t（单位：年），比例系数（自然增长率）为 k=0.05，政策扶持的固定增长额为 r=200 亿元/年。初始时刻（t=0）该地区经济总量为 y_0=10000 亿元，需预测第 10 年的经济总量及长期增长趋势。

建模步骤

定义变量与增长规律：经济总量的变化率 $\frac{dy}{dt}$ 由两部分构成——与当前总量成正比的自然增长部分 ky，以及固定增长部分 r，因此建立一阶线性非齐次常微分方程：

$$\frac{dy}{dt}=ky+r$$

初始条件：$y(0) = 10000$。

解答过程

求解一阶线性常微分方程：

方程变形为标准形式：

$$\frac{dy}{dt}-ky=r\ ,$$

计算积分因子：

$$u(t)=e^{\int -kdt}=e^{-kt}\ ,$$

两边同乘积分因子：

$$e^{-kt}\frac{dy}{dt}-ke^{-kt}y=re^{-kt}\ ,$$

左边化为全微分：

$$\frac{d}{dt}(ye^{-kt})=re^{-kt}\ ,$$

两边积分：

$$ye^{-kt}=\int re^{-kt}dt+C=-\frac{r}{k}e^{-kt}+C\text{，}$$

整理得通解： $y(t)=Ce^{kt}-\frac{r}{k}$.

代入初始条件确定常数 C：

当 t=0 时，$y(0)$=10000 = C - 200/0.05，解得 C=10000 + 4000=14000

特解为：$y(t)$ = $14000e^{0.05t}$ – 4000.

预测第 10 年经济总量：

代入 t=10，$y(10)$=$14000e^{0.05\times10}$ - 4000≈14000×1.6487 – 4000

≈23081.8 - 4000=19081.8 亿元.

长期增长趋势分析：

当 $t\to+\infty$时，$e^{0.05t}\to+\infty$，因此 $y(t)\to+\infty$，经济总量将随时间持续增长，增长速率逐渐加快。

经济意义

该模型体现了“内生增长+外生扶持”的经济发展逻辑：比例系数 k 反映经济自身增长动力（如技术进步、产业升级），固定增长额 r 体现政策支持、外部投资等外生因素的作用。通过模型可量化不同因素对经济增长的贡献，为政策制定者调整扶持力度、预判经济走势提供参考。

案例二：市场均衡价格调整模型

问题背景

某商品的市场价格变动率与当前价格和均衡价格的差额成正比。设商品价格为 $p(t)$（单位：元），时间 t（单位：周），均衡价格（供需平衡时的价格）为 p_e=100 元，调整系数

λ= - 0.2（负号表示价格偏离均衡时会向均衡方向调整）。初始时刻（t=0）商品价格为 $p(0)$=150 元，需分析价格随时间的变化规律，以及达到均衡价格 95%所需的时间。

建模步骤

定义变量与价格调整规律：价格变动率 $\frac{dp}{dt}$ 与价格差额 p - p_e成正比，建立一阶线性常微分方程： $\frac{dp}{dt}=\lambda(p-p_e)$

初始条件：$p(0)$=150。

解答过程

求解常微分方程：

方程为可分离变量型，分离变量得：$\dfrac{dp}{p-p_e}=\lambda dt$，

两边积分：$\ln\left|p-p_e\right|=\lambda t+C_1$ $_1$，整理得通解：$p(t)=p_e+Ce^{\lambda t}$（其中 $C=\pm e^{C_1}$）

代入初始条件确定常数 C：当 t=0 时，150=100 + C，解得 C=50，

特解为：$p(t)=100+50e^{-0.2t}$。

分析价格变化规律：

当 $t\to+\infty$时，$e^{-0.2t}\to 0$，因此 $p(t)\to 100$，价格将逐渐收敛至均衡价格，符合市场供需调节的基本规律。

计算达到均衡价格 95%所需时间：

均衡价格的 95%为 100×95%=95 元（因初始价格高于均衡价，实际是降至 95%区间），代入方程：

$$95 = 100 + 50e^{-0.2t}$$

解得 $e^{-0.2t} = 0.1$，取自然对数：$-0.2t=\ln 0.1\approx -2.3026$，因此 $t\approx 11.51$ 周。

经济意义

该模型揭示了市场价格的自我调节机制：调整系数 λ 的绝对值越大，价格向均衡收敛的速度越快，反映市场供需弹性越大、调节效率越高。对生产者而言，可通过模型预判价格变动趋势，合理安排生产计划；对消费者而言，可根据价格收敛速度调整购买时机，实现效用最大化。

案例三：资本积累与投资决策模型

问题背景

某企业的资本存量 $K(t)$（单位：万元）变化满足二阶线性常微分方程，资本的边际产出与资本存量成正比，折旧率为常数，投资 $I(t)$为固定值。已知资本变化的微分方程为：

$$\frac{d^2K}{dt^2}-0.1\frac{dK}{dt}-0.02K=50$$

初始条件：$K(0)$=1000 万元（初始资本存量），$K'(0)$=20 万元/年（初始投资带来的资本增长速率），需分析资本存量的长期变化趋势及第 5 年的资本存量。

解答过程

求解二阶线性非齐次常微分方程：

第一步：求对应的齐次方程通解 $K(t)$

齐次方程：$\dfrac{d^2K}{dt^2}-0.1\dfrac{dK}{dt}-0.02K=0$ ，

特征方程：$\lambda^2-0.1\lambda-0.02=0$ ，

解得特征根：$\lambda_1=\dfrac{0.1+\sqrt{0.01+0.08}}{2}=0.2,\lambda_2=\dfrac{0.1-\sqrt{0.01+0.08}}{2}=-0.1,$

齐次方程通解：$K_h(t)=C_1e^{0.2t}+C_2e^{-0.1t}$。

第二步：求非齐次方程的一个特解 $K(t)$

非齐次项为常数 50，设特解为常数 $K=A$，代入方程：

$0-0-0.02A=50$，解得 $A=-2500$，因此特解 $K_p(t)=-2500$。

第三步：非齐次方程通解

通解为齐次解加特解：$K(t)=C_1e^{0.2t}+C_2e^{-0.1t}-2500$。

代入初始条件确定常数 C_1,C_2：

初始资本存量：t=0 时，1000=C_1+C_2 - 2500，即 C_1+C_2=3500 ①

初始资本增长速率：对通解求导 $K'(t)=0.2C_1e^{0.2t}-0.1C_2e^{-0.1t}$，代入 t=0：

20=0.2C_1 - 0.1C_2，即 2C_1 - C_2=200 ②

联立①②，解得 C_1=1233.33，C_2=2266.67。

特解为：

$K(t)=1233.33e^{0.2t}+2266.67e^{-0.1t}-2500$。

分析长期变化趋势：

当 $t\to+\infty$时，$e^{0.2t}\to+\infty$，$e^{-0.1t}\to 0$，因此 $K(t)\to+\infty$，资本存量将持续增长，且增长速率逐渐由 0.2 主导。

计算第 5 年的资本存量：

代入 t=5，

$$K(5) = 1233.33e^{0.2\times5} + 2266.67e^{-0.1\times5} - 2500$$
$$\approx 1233.33\times2.7183 + 2266.67\times0.6065 - 2500$$
$$\approx 2229.4\text{万元}$$

经济意义

该模型整合了资本积累的核心因素：二阶导数反映资本增长速率的变化（如投资效率提升），一阶导数项体现资本折旧对增长的抑制作用，常数项为固定投资的贡献。模型结果表明，在固定投资支撑下，企业资本存量将长期增长，初期受初始资本和折旧影响增长较慢，后期随边际产出的累积效应增长加速，为企业长期投资决策、资本结构优化提供量化依据。