

积分学

第一讲 不定积分

一、不定积分知识点综述和解题方法

1. 不定积分

(1) 定义 若 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数, 则称带有任意常数项的原函数 $F(x) + C$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分(indefinite integral), 记作 $\int f(x)dx$. 即

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

其中记号 \int 称为积分号, 函数 $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量, C 称为积分常数(constant of integration).

(2) 由不定积分的定义, 可得下面两个关系式:

$$\textcircled{1} \frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x) \text{ 或 } d \int f(x)dx = f(x)dx;$$

$$\textcircled{2} \int \frac{dF(x)}{dx} dx = F(x) + C \text{ 或 } \int dF(x) = F(x) + C.$$

2. 基本积分公式

$$(1) \int kdx = kx + C \quad (k \text{ 为常数})$$

$$(2) \int x^\mu dx = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$$

$$(3) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(4) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(5) \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$(6) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$(7) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$(8) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$(9) \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(10) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(11) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$(12) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$(13) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$$

$$(14) \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$(15) \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$(16) \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$(17) \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$(18) \int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$(19) \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$(20) \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$(21) \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + C$$

$$(22) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

3. 不定积分的计算

(1) 第一换元积分法

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$ ，函数 $u = \varphi(x)$ 可导，则 $F(\varphi(x))$ 是 $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ 的原函数，

即有换元公式

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(u) du = F(\varphi(x)) + C$$

(2) 第二换元积分法

设 $f(x)$ 为连续函数， $x = \varphi(t)$ 连续可导且存在反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$ ， $\varphi^{-1}(x)$ 也可导，

$F(t)$ 为 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的原函数，则有换元公式

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

(3) 不定积分的分部积分

不定积分的分部积分公式为

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

(4) 有理函数的积分

由于任意一个有理函数通过多项式的除法都能化为一个多项式（包括 0）与一个真分式的和，而多项式的积分很容易计算，因此求有理函数积分的重点应放在如何求真分式的积分这一问题上. 根据代数学理论，任意一个真分式总可以分解成下面四种部分分式之和的形式：

$$\textcircled{1} \frac{A}{x-a} \quad \textcircled{2} \frac{A}{(x-a)^n} \quad \textcircled{3} \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \quad \textcircled{4} \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$$

其中 n 为大于 1 的正整数， $p^2 - 4q < 0$. 因此求真分式的积分有下列两个主要步骤：一是将真分式分解为上述四种部分分式的和；二是求相应上述部分分式的积分. 下面举例分别加以讨论.

将真分式分解为部分分式之和，一般采用待定系数法，即根据其分母所含的因式，确定出它应由那几种部分分式构成，设出待定系数，然后再将部分分式相加，最后通过比较两边的系数，求出待定系数.

(5) 无理函数的积分

可采用适当的换元 $t = \sqrt[n]{x}$ ， $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 等转变再积分。

(6) 待定的三角函数的积分

如果采用第一换元、第二换元和分部积分法积不出来的，可考虑万能公式变换。如令

$$t = \tan \frac{x}{2}, \text{ 则 } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \text{ 代入原表达式即转化为有理函数,}$$

再积分。

(7) 另外由于许多初等函数的原函数根本无法用初等函数表示，如 $\frac{\sin x}{x}$ ， $\sqrt{x^3+1}$ ，

e^{-x^2} ， $\frac{1}{\ln x}$ 等，都没有初等原函数.

二、积分方法与典型题目

(一) 基本积分法

采用基本积分公式，拆项，第一换元积分方法，第二换元积分方法，分部积分法
例 求不定积分

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$$

$$(3) \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$(4) \int \frac{1-x^8}{x(1+x^8)} dx$$

$$(5) \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$(6) \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1-\tan^2 x}}$$

$$(7) \int \frac{1}{1+e^x} dx$$

$$(8) \int \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x(1+x)} dx$$

$$(9) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$(10) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$$

$$(11) \int \frac{1}{x^3} \arctan x dx$$

$$(12) \int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx$$

$$(13) \int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$$

$$(14) \int \arcsin x \cdot \arccos x dx$$

(二) 常用积分技巧

1. 分子分母同乘(除)以某函数

$$\text{例 2. } \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$$

$$\text{例 3. } \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$$

$$\text{例 4. } \int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$$

$$\text{例 5. } \int \frac{1-x^2 \cos x}{(1+x \sin x)^2} dx$$

$$\text{例 6. } \int \frac{x + \sin x \cos x}{(\cos x - x \sin x)^2} dx$$

$$\text{例 7. } \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}$$

2. 拆分, 凑微分或分部

$$\text{例 8. (1) } \int \frac{\sin x - 2 \cos x}{\cos x + \sin x} dx;$$

$$(2) \int \frac{dx}{x + \sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{例 9. } \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$$

3. 拆分, 一个分部, 一个不动抵消

$$\text{例 10. } \int \left(1+x - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{x+1}{x}} dx$$

$$\text{例 11. } I = \int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1-\sin x)^2} dx$$

4. 拆分, 两个分部后抵消。

例 12. $\int \frac{e^{\sin x}(x \cos^3 x - \sin x)}{1 + \cos 2x} dx$

5. 分部积分造循环

例 13. (1) $I = \int e^{-x} \sin 2x dx$; (2) $I = \int \cos(\ln x) dx$

例 14. $I = \int \sec^3 x dx$

6. 换元再分部

例 15. $\int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

7. 倒代换

例 16. $\int \frac{3}{x^{16}(1+x^6)} dx$

三 杂例

例 17. 已知 $f'(e^x) = \sin x$, 求 $f(x)$ 。

例 18. 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x f'(x) dx$

例 19. 设 $y = y(x)$ 由方程 $y^2(x-y) = x^2$ 确定, 求 $\int \frac{dx}{y^2(x)}$.

例 20. 建立 $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ 的递推公式

(三) 练习题

1. 求不定积分

$$(1) \int \frac{2^x 3^x dx}{4^x + 9^x}$$

$$(2) \int \frac{1-x^2 \cos x}{(1+x \sin x)^2} dx$$

$$(3) \int \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x dx$$

$$(4) \int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$$

(5) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

(6) $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x} dx$

(7) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

2. 已知 $\frac{\cos 2x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int xf'(x)dx$ 。

3. 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$, 且 $f(1) = 0$, 求 $f(x)$ 。

4. 已知 $\arctan \sqrt{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x^2 f'(x)dx$

5. 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 计算 $\int f(x)dx$

6. 设 $f(x)$ 单调可导, $f^{-1}(x)$ 为其反函数, 且 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 求 $\int f^{-1}(x)dx$

7. 建立 $I_n = \int \sec^n x dx$ 的递推公式。

8. 设 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$, 且 $x > 0$ 时 $f(x^2)F(x^2) = \frac{e^x}{4(1+x)^2}$, $F(0) = 1, F(x) > 0$, 求

$F(x)$.

天津赛题选编

17 (13) $\int \frac{e^{\sin x}(x \cos^3 x - \sin x)}{1 + \cos 2x} dx$

18 (3) 设 $\int f(x)dx = x^2 + C$, 则 $\int xf(1-x^2)dx = \underline{\hspace{2cm}}$

19 (11) $\int \frac{3}{x^{16}(1+x^4)} dx$

三、巩固练习

(一) 1. $\int \tan^2 x \, dx$

2. $\int \sin^2 x \, dx$

3. $\int \frac{1}{\sin^2(2x+4)} \, dx$

4. $\int \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} \, dx$

5. $\int \frac{1}{\cos^4 x} \, dx$

6. $\int \tan^4 x \, dx$

7. $\int \frac{1}{1+\cos x} \, dx$

8. $\int \frac{1}{1+\sin x} \, dx$

$$9. \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

$$11. \int \frac{1}{2 + \sin^2 x} dx$$

$$12. \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$$

$$13. \int \frac{dx}{1 + \tan x}$$

$$14. \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx$$

$$15. \int \frac{\tan x}{1 + \tan x + \tan^2 x} dx$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^7 x}}$$

(二) 1. $\int t^a \ln t \, dx$

2. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx$

3. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} \, dx$

4. $\int \frac{1}{1+x^4} \, dx$

5. $\int \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \, dx$

6. $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx$

$$7. \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$$

$$8. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx$$

$$(三) 1. \int \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right] dx$$

$$2. \int (\arcsin x)^2 dx$$

$$3. \int \sec^3 x dx$$

$$4. \int e^{\sin x} \sin 2x dx$$

$$5. \int \arctan(1 + \sqrt{x}) dx$$

$$6. \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$$

$$7. \int e^x \left(\frac{1-x}{1+x^2} \right)^2 dx$$

$$8. \int \frac{\cos x \sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$9. \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$$

$$10. \int e^x \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$$

$$11. \int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx \quad (\text{另一种方法: 利用万能公式})$$

$$12. \int \frac{1}{5 - 3 \cos x} dx$$

$$13. \int \frac{1}{1 + 4 \cos x} dx$$

$$14. \int \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} e^{3 \arctan x} dx$$

积分学

第二讲 定积分

一、定积分知识点综述和解题方法

1. 定积分的定义和性质

(1) 定积分的定义

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 用任意的分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 将 $[a, b]$ 分成 n 个小区间, 每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$

上任取一点 $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$, 作和式 $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, 记 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, 如果当 $\lambda \rightarrow 0$, 和式 S_n 的极限存在, 则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积(integrable), 并称此极限值为函数

$f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分(Definite Integral), 记作 $\int_a^b f(x) dx$, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

(2) 定积分存在定理

① 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续或有界且只有有限个间断点, 那么 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积.

② 定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 作为一个和式的极限, 是一个确定的数值, 这个数值仅与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a, b]$ 有关, 而与积分变量选用什么字母表示无关.

也就是说, 定积分的值不依赖于积分变量的选择;

③ 定积分的定义, 是在区间 $[a, b]$ 上给出的, 这隐含着 $a < b$; 若 $a \geq b$, 则补充规定:

当 $a > b$ 时, $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$; 当 $a = b$ 时, $\int_a^b f(x) dx = 0$.

(3) 定积分的性质

假定积分都是存在的.

性质 1 函数和 (或差) 的积分等于它们的积分的和 (或差)

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

性质 2 设 c 为任意常数, 则

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

即常数可以提到积分号外.

性质 3 对任意常数 c ，恒有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

性质 4 如果在 $[a, b]$ 上函数 $f(x)=1$ ，则 $\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a$

性质 5 如果在 $[a, b]$ 上函数 $f(x) \geq 0$ ，则 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

由定积分的几何意义易证得下面两个推论.

推论 1 如果在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$ ，则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

推论 2 $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

性质 6 设 M 和 m 分别为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上最大值和最小值，即对任意 $x \in [a, b]$ ，恒有 $m \leq f(x) \leq M$ ，则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

2. 积分中值定理

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi \in [a, b]$ ，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

3. 变限积分函数

(1) 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则积分上限函数 $\Phi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导，且

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x),$$

(2) 如果函数 $u(x), v(x)$, $F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$ 在区间 $[a, b]$ 上可导，那么

$$F'(x) = F(u(x))u'(x) - F(v(x))v'(x)$$

4. 定积分的计算

(1) 定积分第二基本定理

设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数， $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(2) 换元积分法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 而函数 $x = \varphi(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导数 $\varphi'(t)$,

当变量 t 从 α 变到 β 时, $\varphi(t)$ 从 $a = \varphi(\alpha)$ 单调地变到 $b = \varphi(\beta)$, 则有换元公式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

(3) 定积分的分部积分法

$$\int_a^b u(x)dv(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

5. 奇偶函数与周期函数的定积分

(1) 对称区间上的定积分

设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上连续, 则有下列积分公式:

① $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$;

② 当 $f(x)$ 为奇函数时, $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$;

③ 当 $f(x)$ 为偶函数时, $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

(2) 周期函数

设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, a 为任意常数, 则有:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx .$$

6. 定积分在几何与物理上的应用

由曲线 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$ 所围成的平面图形的面积

$$A = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx$$

由曲线 $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, 直线 $y = c$, $y = d$ 所围成的平面图形的面积为

$$A = \int_c^d |g_2(y) - g_1(y)| dy$$

以区间 $[a, b]$ 上的连续曲线 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形 $AabB$, 绕 x 轴旋转一周而形成的旋转体的体积为

$$V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

由曲线 $x = g(y)$, 直线 $y = c$, $y = d$ 及 y 轴所围成的曲边梯形 $CcdD$, 绕 y 轴旋转一周而形成的旋转体的体积为

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

7. 广义积分

无穷限积分与瑕积分

二、定积分方法与典型题目

(一) 变限积分的应用

1. 证明积分恒等式

例 1. 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$, 证明 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln^2 x}{2}$.

2. 变限积分用于分部积分

例 2. 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$, 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$.

3. 变限积分用于证明中值定理

例 3. 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) dx$$

例 4. (第一积分中值定理), 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 不变号, 证明存在

$\xi \in (a, b)$, 使 $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$.

(二) 特殊类型定积分的换元法

1. 对称区间上的积分

例 5. 计算 $\int_{-1}^1 \frac{(x - \cos x)^2 \cos x}{x^2 + \cos^2 x} dx$.

例 6. 设正函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 计算 $I = \int_{-1}^1 \frac{f(x) \cos x + \sin^7 x}{f(x) + f(-x)} dx$.

2. 平移换元化为对称区间上的积分

例 7. 计算 $\int_0^2 [\tan(x-1)^3 + \sqrt{2x-x^2}] dx$.

例 8. 计算 $\int_0^2 \frac{x + e^x - e^{2-x}}{x^2 - 2x - 3} dx$.

3. 换元法

$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ 型的积分

例 9. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \tan^{2021} x}$;

例 10. (与例 5 一致,也可应用换元法) $\int_0^2 \frac{x + e^x - e^{2-x}}{x^2 - 2x - 3} dx$.

例 11. 计算 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \sin^2 x} dx$.

例 12. 计算 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx$.

(三) 积分方程

1. 造循环, 求定积分和函数

例 13. 设 $f(x)$ 连续, 且满足 $f(x) = 3x^2 - \int_0^2 f(x)dx - 2$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

例 14. 设 $f(x)$ 连续, 且满足 $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f^2(x)dx$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 变限积分方程求函数

例 15. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(1) = 1$, 其反函数为 $g(x)$, 且满足

$$\int_1^{f(x)} g(t)dt = \frac{1}{3} \left(x^{\frac{3}{2}} - 8 \right), \text{ 求 } f(x).$$

(四) 变限积分函数的积分用分部积分法, 注意凑微分技巧

例 16. 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$ 则 $\int_0^\pi f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(五) 求均值

例 17. 设非负函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \int_0^x f(x-t)dt = \sin^4 x$ 求, 求 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的平均值。

(六) 利用定积分的定义求极限

例 18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right] = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right).$

练习 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2} = \left(2 \int_1^2 \ln x dx \right).$

(七) 反常积分

1. 无穷积分倒代换

例 19. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}.$

例 20. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{1+x^{2011}+x^{4022}}}.$

2. 分部积分

例 21. $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$ (天津数赛)

例 22. 求不定积分递推式 $I_n = \int x^n e^{kx} dx$. (正整数 n)

例 23. (1) 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$. (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$.

(八) 与变限积分有关的问题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \frac{1}{x^3} (e^{-t^2} - 1) dt$.

2. 若 $a > 0$ 时, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} [\sin(\frac{\pi}{6} - x) \tan 3x]$, 则 $a =$ (36)

3. 选择题 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$, 则 $F(x)$ 为 (正常数).

(九) 天津赛题选编 (不定积分)

17 (13) $\int \frac{e^{\sin x} (x \cos^3 x - \sin x)}{1 + \cos 2x} dx$

18 (3) 设 $\int f(x) dx = x^2 + C$, 则 $\int xf(1-x^2) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

18 (11) $\int \frac{3}{x^{16}(1+x^4)} dx$

(十) 天津赛题选编 (定积分)

17 (6) 设函数 $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 则错误结论是 ()

(A) 当 $f(x)$ 为奇函数时, $F(x)$ 必为偶函数; (B) 当 $f(x)$ 为偶函数时, $F(x)$ 必为奇函数;

(C) 当 $f(x)$ 为 T 周期函数时, $F(x)$ 必为 T 周期函数;

(D) 当为 T 周期函数时, $F(x)$ 不一定为 T 周期函数。

$$18(17) \int_3^5 \frac{\sqrt{\ln(12-x)}}{\sqrt{\ln(12-x)} + \sqrt{\ln(4+x)}} dx$$

$$19 (5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

21 (2) 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x) = \cos x + 8x \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + 2 \sin x \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$21 (4) \int_0^{10\pi} x |\cos x| dx = \underline{\hspace{2cm}}。$$

21 (16) 计算 $\int_{-1}^1 \frac{1+3x^2+5x^4}{1+2^x} dx$.

(十一) 练习题

1. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = x + x^2 \int_0^1 f(x) dx + x^3 \int_0^2 f(x) dx$, 求 $f(x)$. (答案: $x + \frac{3}{8}x^2 - x^3$)

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & x \geq 0 \\ \frac{1}{e^x+1} & x < 0 \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$

3. $\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x)^2} dx$ (答案: $\frac{1}{4} \ln 2$)

$\int_0^1 \frac{\arctan x}{(1+x^2)^2} dx$ (答案: $\frac{\pi^2}{64} + \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$)

4. 已知 $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$, 求 $\int_0^1 xf(x) dx$. (答案: $\frac{1}{2} \cos 1 - \frac{1}{2}$)

5. 设 $f(t) = \int_1^t e^{-x^2} dx$, 求 $\int_0^1 t^2 f(t) dt$ (答案: $\frac{1}{3e} - \frac{1}{6}$)

6. $f(u)$ 是连续函数, 证明 $\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$, 并求 $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx$ (答案: $\frac{\sqrt{3}}{18} \pi^2$)

7. $\int_{\frac{1}{2}}^2 (1+x - \frac{1}{x}) e^{\frac{x+1}{x}} dx$ (答案: $\frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}}$)

8. $\int_0^\pi \frac{\pi + \cos x}{x^2 - \pi x + 2004} dx$ (答案: $\frac{2\pi}{\sqrt{2004 - \frac{\pi^2}{4}}} \arctan \frac{\pi}{2\sqrt{2004 - \frac{\pi^2}{4}}}$)

9. (1) 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin(x + \frac{\pi}{4}) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$ (2) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \frac{1}{8} \pi \ln 2$

10. $\int_0^a x^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx$ (答案: $(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}) a^3$)