最优化问题

- 在现实生活中，常会需要解决“投入最少”、“成本最低”、“效益最好”等问题，数学上称这样的问题为最优化问题，这类问题通常可以转化为数学上的求最大值或最小值问题.

求解最优化问题的步骤：

步骤1：理解问题，清楚哪些是已知的，哪些是未知的，要解决什么问题；

步骤2：引入变量，将需要求最大值或最小值的变量设为目标变量（即因变量），把影响目标变量的变量设为自变量，用适当的字母表示这些变量；

步骤3：建立目标函数，建立目标变量与自变量之间的函数关系，确定自变量的取值范围；

步骤4：求出目标函数在自变量的取值范围上的最值；

步骤5：用步骤4得到的结果解释原问题.

例1 某商品的成本函数为$C=15Q-6Q^2+Q^3$，

（1）生产数量为多少时，可使平均成本最小？

（2）求出边际成本．考察当平均成本最小时，边际成本与平均成本的关系．

解 （1）平均成本为

$$\overline{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=15-6Q+Q^2$$

因为 $\overline{C}'(Q)=-6+2Q$，令$\overline{C}'(Q)=0$，得 $Q=3$ ．

又因$\overline{C}''(Q)=2>0$，所以当Q=3时，平均成本最小．

（2）边际成本为$C'(Q)=15-12Q+3Q^2$

当Q=3时，有$C'(3)=15-12\times3+3\times3^2=6$

$$\overline{C}(3)=15-6\times3+3^2=6.$$

即

$$C'(3)=\overline{C}(3)$$

由此可得经济学中的一个重要结论：当平均成本最小时，边际成本等于平均成本．

例2 若函数$R=R(Q)$表示销售某种产品Q件时的总收入，$C=C(Q)$表示生产此种产品Q件时的总成本，则总利润函数为：

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)$$

企业生产和销售多少件产品时，能够获得最大利润？

分析 如果$R=R(Q)$和$C=C(Q)$是 $(0,+\infty)$ 上的二阶可导函数，

$L(Q)$存在一个极大值，则由可导函数存在极值的条件可知，

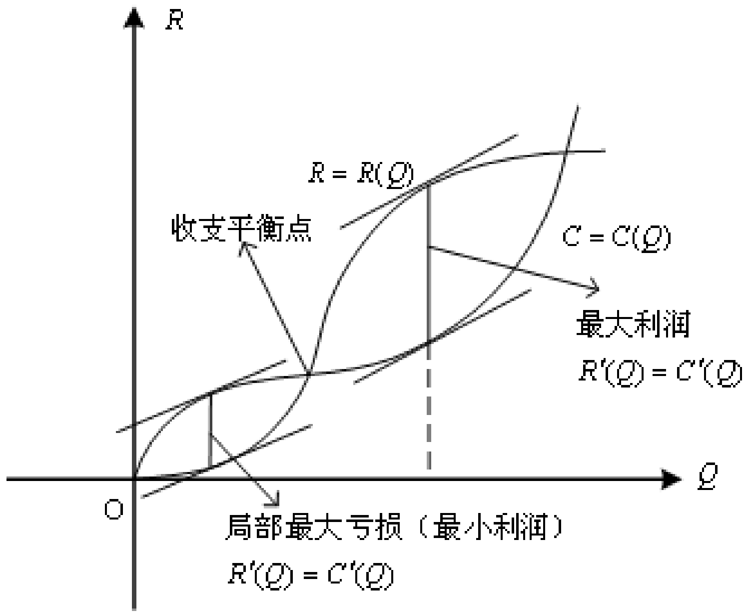
这个极大值点一定是使得 $L'(Q)=R'(Q)-C'(Q)=0$ 的点，即使

$R'(Q)=C'(Q)$ 成立的点，由此可得结论：

边际收入和边际成本相等的生产量是企业获得最大利润的生产量.

利润取得最大值的必要条件：$L'(Q)=0$（或$R'(Q)=C'(Q)$）

利润取得最大值的充分条件：$L''(Q)<0$（或$R''(Q)<C''(Q)$）



在图中给出了总成本函数和总收入函数的图形，在收支平衡点的左侧，企业是亏损经营；在收支平衡点的右侧，企业是获利经营，再向右成本超过收入，再次成为亏损经营；在获得最大利润和局部最大亏损处均为边际收入和边际成本相等处.

例3 已知某企业的总收益函数为$R(Q)=26Q-2Q^2-4Q^3$，总成本函数为$C(Q)=8Q+Q^2$，其中Q表示产品的产量. 求利润函数，平均成本函数，边际收益函数，边际成本函数，以及企业获得最大利润时的产量及最大利润.

解 利润函数为

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)=26Q-2Q^2-4Q^3-8Q-Q^2$$

$$=18Q-3Q^2-4Q^3$$

平均成本函数为$\overline{C}(Q)=\dfrac{8Q+Q^2}{Q}=8+Q$

边际收益函数为$R'(Q)=26-4Q-12Q^2$

边际成本函数为$C'(Q)=8+2Q$

边际利润函数为 $L'(Q)=R'(Q)-C'(Q)=18-6Q-12Q^2$

例4 已知某企业的总收益函数为$R(Q)=26Q-2Q^2-4Q^3$，总成本函数为 $C(Q)=8Q+Q^2$，其中Q表示产品的产量. 求利润函数，平均成本函数，边际收益函数，边际成本函数，以及企业获得最大利润时的产量及最大利润.

解 令

$$L'(Q)=0$$

得

$$Q=1,\quad Q=-1.5$$ （舍去）

又因为

$$L''(Q)=R''(Q)-C''(Q)=-6-24Q$$

$$L''(1)=-30<0$$

所以当Q=1时企业获得最大利润，最大利润为

$$L(1)=(18Q-3Q^2-4Q^3)|_{Q=1}=11$$

例5 一商店按批发价3元买进一批商品零售. 若零售价定为每件5元, 估计可售出100件, 若单件售价每降低0. 2元, 则可多售出20件. 问该商店应进多少件商品, 每件售价多少才可获得最大利润?最大利润是多少?

解 设利润函数为L, 购进Q件商品, 每件P元. 则

$$L=(P-3)Q$$

由题设, Q是P的线性函数, 设为 $Q=a+bP$, 则

$$\begin{cases}100=a+b\times 5\\120=a+b\times 4.8\end{cases}$$

解方程组得 $a=600, b=-100$, 所以

$$L=(P-3)(600-100P)=-100P^2+900P-1800$$

又因为 $L'(P)=-200P+900$, 令 $L'(P)=0$, 得 $P=4.5$,

而 $L''(4.5)<0$, 所以当 $P=4.5$ 时利润L最大, 此时

$$Q=150, L=225.$$

故购入150件, 每件售价4.5元时可获最大利润225元.

例6 某种物资一年需用量为24000件. 现整批间隔进货（即当库存量下降到零时，随即订购，到货.平均的库存量为批量的一半）. 若每次的订购费用为64元，每件物品的年保管费用为4.8元，试求最优订购批量（即使每年保管费用和订购费用之和最小的批量）；最优订购次数；最优进货周期和最小总费用.

解 设每批订购Q件，总费用为C元，由题意得

$$C=\text{订购费用}+\text{保管费用}$$

$$=64\times\frac{24000}{Q}+4.8\times\frac{Q}{2}$$

求导数得 $C'=-\dfrac{64\times 24000}{Q^2}+2.4$

令 $C'=0$, 得 $Q=\sqrt{\dfrac{64\times 24000}{2.4}}=800$. 又因 $C''(800)>0$

故 $Q=800$ 件时总费用最小.

最优订购批次为：$\frac{24000}{800}=30$（批）

最优进货周期为：$\frac{360}{30}=12$（天）

最小总费用为：$C=64\times\frac{24000}{800}+4.8\times\frac{800}{2}=3840$（元）

例7 一商家销售某种商品的价格为$P=7-0.2Q$(万元/千公斤),Q为销售量(单位:千公斤),商品的成本函数为$C=3Q+1$(万元).

(1)若每销售一千公斤商品,政府要征税t(万元),求该商家获最大利润时的销售量;

(2)t为何值时,政府税收额最大.

解 (1)利润函数

$$
\begin{aligned}
L(Q) &= (P-t)Q-C \\
&= (7-0.2Q-t)Q-(3Q+1) \\
&= -0.2Q^2+(4-t)Q-1
\end{aligned}
$$

令$L'(Q)=-0.4Q+4-t=0$, 得$Q=\dfrac{5}{2}(4-t)$

又 $L''(Q)=-0.4<0$, 所以当$Q=\dfrac{5}{2}(4-t)$ 时商家获得最大利润.

例7 一商家销售某种商品的价格为$P=7-0.2Q$(万元/千公斤),Q为销售量(单位:千公斤),商品的成本函数为$C=3Q+1$(万元).

(1)若每销售一千公斤商品,政府要征税t(万元),求该商家获最大利润时的销售量;

(2)t为何值时,政府税收额最大.

解 (2)政府税收额

$$T=t\cdot Q=t\cdot\frac{5}{2}(4-t)=10t-\frac{5}{2}t^2.$$

令$T'=10-5t=0$,得$t=2$, 又因 $T''=-5<0$,

所以当t=2时,政府税收总额最大.