“多元函数的偏导数、全微分及其应用”翻转课堂学习方案

学习班级：________ 行政班级：_________ 小组：________ 姓名：________

一、基本信息

课程名称	高等数学 C（2）	**学习对象**	经济管理类专业
翻转内容	多元函数的偏导数、全微分及其应用	**课程学时**	线上 8 学时、线下 8 学时
重点难点	**重点**：偏导数和全微分的概念与计算方法，经济学中的应用 **难点**：复合函数偏导数法，弹性分析，经济优化问题		
目标导学	**知识目标**：理解二元函数偏导数和全微分概念,掌握求偏导数和全微分的方法；掌握偏导数在几何和弹性分析中的应用；掌握二元函数极值存在的必要条件和充分条件，会求二元函数的极值. **能力目标**：能够比较与分析引入偏导数概念例子的不同点和相同点；能够将求偏导和全微分方法进行分类概括；能够选择合适方法计算多元函数的偏导数和全微分；能够利用偏导数和全微分解决一些简单的应用问题（弹性分析、经济优化等）. 从中体验由具体到抽象，由特殊到一般的思维方式；学会独立思考和主动探究，提升自主学习和合作学习的能力。 **情感目标**：通过把实际问题抽象为与偏导数和全微分相关的问题，再将所学知识用于实践，认识并体验偏导数和全微分与我们生活的关系，养成用数学的思想方法解决实际问题的意识.		
学习方式	（1）学生个人通过辅助学习资源完成“多元函数的偏导数、全微分及其应用”内容的学习； （2）学生将个人质疑带入小组讨论，形成学习结果； （3）将小组的质疑，带到班级进行讨论，形成学习结果； （4）对班级讨论后仍不能解决的问题进行汇总整理，提交教师； （5）课上检测学习成效，展示学习成果；教师课上解疑.		
学习资源	（1）线上学习资源 https://tjcu.yuketang.cn（天津商业大学-学堂云：多元微积分 2-5 至 2-19）； （2）线上学习资源 https://www.icourse163.org/course/XJTU-1001756006（中国大学慕课西安交大高等数学（二））第四周第三讲（方向导数）、第五周第一讲（梯度） （3）高等数学及其应用（第二版）教材：第 8.3、8.4、8.5 节 （4）伴你学数学—高等数学及其应用导学（第二版） 问题搜索部分：第 8.3、8.4、8.5 节； 技能归纳部分：p335-339，例 5—例 15； 能力提升部分：p342-353，“停下来想一想”栏目解惑.		
时间安排	第 1 阶段：自主学习质疑：完成“偏导数”和“偏导数应用”的学习；提交“自学质疑学案”“训练展示学案”中的（一）、（二）； 第 2 阶段——线下检测+释疑：课堂学习效果检测，解决学习中的问题； 第 3 阶段——线下展示评价：探析求导法则以及感受导数的妙用和价值学习成果展示、点评；		

	第 4 阶段——课后总结反思：提交总结反思学案（三）.

二、学习方案

（一）自学质疑学案	
问题记录	学案内容（自主学习）

一、思考题

第 1 部分（偏导数概念、复合函数偏导数、隐含数偏导数及高阶偏导数）

1. 想想偏导数概念的本质是什么？$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 作为符号有何不同？

2. 说说偏导数在如下问题中的含义.

① 医学问题（生命科学领域）：在关于体温过低的研究中（由于暴露造成热消耗），有必要知道人体的表面积。如下经验公式给出了人体的体表面积 A（平方英寸）与其体重 w（磅）和身高 h（英寸）的关系：$A=f(w,h)=15.64w^{0.425}v^{0.725}$．$f(w,h)$ 对 w 的偏导数 $f_w(w,h)$ 及对 h 的偏导数 $f_h(w,v)$.

② 安全问题（社会科学领域）：已知理想条件下，如果一个人开车时猛踩刹车，刹车停止时汽车滑行长度（英尺）由公式 $L(w,v)=kwv^2$ 给出，其中 k 为常数，w 为车重（磅），v 为车的速度（英里/小时）．$L(w,v)$ 对 w 的偏导数 $L_w(w,v)$ 及对 v 的偏导数 $L_v(w,v)$.

③ 需求问题（经济学领域）：某超市两种商品 A、B 的日销售量 Q_1、Q_2 分别为其价格 p_1、p_2 的线性函数：$Q_1=200-5p_1+4p_2, Q_2=300+2p_1-4p_2$，$\dfrac{\partial Q_1}{\partial p_1}=?\dfrac{\partial Q_1}{\partial p_2}=?\dfrac{\partial Q_2}{\partial p_1}=?\dfrac{\partial Q_2}{\partial p_2}=?$并对结果进行经济学解释.

3.思考下面问题

（1）二元函数在一点的偏导数存在能否说明其在该点连续？反之是否成立？试考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$ 及 $$z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

在点（0,0）处的连续性与偏导数的存在性.

（2）若函数 $z=f(u,v,x)$ 偏导数存在，且 $u=\varphi(x),v=\psi(x)$ 可导，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\mathrm{d}u}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial f}{\partial x}$，试问等号左边为什么用 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，而不用 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$？

（3）若函数 $z=f(u,v,x),u=u(x,y),v=v(x,y)$ 偏导数存在，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 对吗？如果对，请问等号左边的 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 与等号右边的 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 含义是否相同？为什么？

（4）求多元复合函数的高阶偏导数时应注意什么？

（5）求隐函数的偏导数要注意什么？

第 2 部分（全微分概念、二元函数可微偏导数存在及连续之间的关系、一阶全微分形式的不变性及全微分在近似计算中的应用）

1. 全微分概念的本质是什么？几何意义是什么？

2. 一元函数可微与可导等价，可导则连续；对于二元函数有类似的性质吗？可微、偏导数和连续性之间有何关系？

3. 对于二元函数$z = f(u,v)$, 不论u,v是自变量还是中间变量，其全微分表达式是否如下式所示？

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

4. 如何利用全微分求二元函数的近似值？

第 3 部分（空间曲面的切平面与法线、偏导数在弹性分析中的应用、多元函数的极值与最值及经济优化问题）

1. 如何确定空间曲面切平面的法向量和法线的方向向量？

2. 如何借助于偏弹性判断两种商品是竞争的还是互补的？

3. 如何求二元函数的无条件极值？它和一元函数求极值的过程有什么区别？

4. 二元函数的条件极值与无条件极值的区别是什么？

5. 解决多元经济优化问题的基本步骤是什么？

6. 最小二乘法的原理是什么？

二、练习题

第 1 部分（偏导数概念、复合函数偏导数、隐含数偏导数及高阶偏导数）

1. $z=\ln(xy)+f(xy,x+y)$，计算 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $z=\mathrm{e}^{x-2y}$，且 $x=\sin t$，$y=t^3$， 计算 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

3. 求由方程 $2xz-2xyz+\ln xyz=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数.

4. 求 $z=x\sin y-\mathrm{e}^{xy}$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 设 $z=f(y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

第 2 部分（全微分概念、二元函数可微偏导数存在及连续之间的关系、一阶全微分形式的不变性及全微分在近似计算中的应用）

1. 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量为 Δz ,全微分为 $\mathrm{d}z$ ，写出 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量与全微分的关系.

2.设 $z=\arctan\frac{x}{1+y^2}$ ，求 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}$.

3. 求函数 $u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$ 的全微分,其中 f 可微.

4. 设 $x+y^2+z^3=\mathrm{e}^y+\ln(x^2+z^2)$ ，求 $\mathrm{d}z$.

5. 求 $1.04^{2.02}$ 的近似值.

第 3 部分（空间曲面的切平面与法线、偏导数在弹性分析中的应用、多元函数的极值与最值及经济优化问题）

1. 求曲面 $e^z + xy = 3$ 在点 $(1,2,0)$ 的切平面方程与法线方程.

2. 求函数 $f(x,y) = y^3 - x^2 + 6x - 12y + 5$ 的极值.

3. Q_1, Q_2 分别表示商品甲、乙的需求量，P_1, P_2 分别表示这两种商品的价格，已知需求函数分别为

$$Q_1 = 16 - 2P_1 + 4P_2, Q_2 = 20 + 4P_1 - 10P_2$$

总成本函数为 $C = 3Q_1 + 2Q_2$，试问如何定这两种商品的价格，才可使利润最大？

三、学习效果检测

1.学习完相应内容后，通过教材和作业检验对内容的理解；

2.对未理解的内容查找、反思、质疑并列出.

教师提示：

1. 根据个人实际情况，选择辅助学习资源中提供的一种或多种资源进行学习或其他资源进行学习.

2. 内容学习中需要认真思考思考题；内容学习后，要完成作业题；在此基础上发现学习中的问题，到小组讨论解决，不能解决的到班级讨论解决；班级不能解决的问题提交教师.

（二）训练展示学案	
问题记录	学案内容

一、我学会了吗？

1. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{5xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处

（A）连续，偏导数存在　　（B）连续，偏导数不存在

（C）不连续，偏导数存在　　（D）不连续，偏导数不存在

2. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分是 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数 $f_x^{'}(x_0,y_0)$、$f_y^{'}(x_0,y_0)$ 的

(A)必要而非充分条件　　(B)充分而非必要条件

(C)既非充分也非必要条件　　(D)充分必要条件

3. 设函数 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$，则点 $(0,0)$ 是函数 z 的（　　）

(A)极大值点但非最大值点　　(B)极大值点且是最大值点

(C)极小值点但非最小值点　　(D)极小值点且是最小值点

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 求 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$.

5. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的可微性.

6. 已知 $z=\ln(xy)+f(x-y,e^{\frac{x}{y}})$，试求 $z_x,z_y,\mathrm{d}z$.

7. $z=\ln(u^2+v)$， $u=e^{x+y^2}$， $v=x^2+y$． 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$．

8. $z=\mathrm{e}^{x+2y}$，求二阶偏导数和 $\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$．

9. $z=f(x,\frac{x}{y})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

10. 求抛物面 $z=ax^2+by^2$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面和法线方程.

11. 若函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点 $M_0(1,-1)$ 处取得极值，试确定常数 a.

12. 设 $z=xy+xf(u)$，且 f 的所有一阶偏导数都连续且 $u=\frac{y}{x}$，则有 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$．

13. 设$u = xy^2z^3$，其中$z = f(x,y)$由方程$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$确定，求$u_x|_{(1,1,1)}$.

14. 设$z = z(x,y)$由方程$F(cx - az, cy - bz) = 0$确定，证明：$az_x + bz_y = c$.

15. 设$z = xf(\frac{y}{x}) + (x-1)y\ln x$，其中$f$是任意的二次可微函数，求证：$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (x+1)y$.

16. 设生产某种产品需要两种原料A和B，原料A和B的单价分别为10元和15元，用x单位原料A和y单位原料B可生产$-x^2 + 20xy - 8y^2$单位该产品，现欲最低成本生产448单位的该产品，问需要多少原料A和原料B？

17.设某工厂生产甲、乙两种产品，产量分别为x和y（单位：千件），利润函数为$L(x,y) = 6x - x^2 + 16y - 4y^2 - 2$

（单位：万元）
已知生产这两种产品时，每千件产品均需消耗某种原料 2000kg，现有该原料12000kg，问两种产品各生产多少千件时，总利润最大？最大利润是多少？

二、跳一跳我能做什么？

1. 在进行某项生产活动过程中，若投入的生产要素为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，产出为 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，资源总量 a 的受限于 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a$。当 a 的变化时，其对产出最优值 u_0 有何影响？

2. 攀岩爱好者进行攀岩活动,欲在山脚下寻找一上山坡度最大的点作为攀登的点,该如何寻找呢?(假设小山的底面为 xoy 坐标面，底部所占区域为 $D = \left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 - xy \le 75\right\}$，高度为 $h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$).

三、感受偏导数与全微分的妙用和价值（选择其一.以小组为单位集体完成）

1．偏导数与全微分在概念、运算、结论及应用方面的反问题（即与概念相反的概念以及有关法则或结论成立与不成立的问题）与举例.

2.许多大公司都会生产几种互相关联的产品。比如吉利公司会生产刀片和刀架，福特公司会销售几种不同式样但具有竞争性的汽车。你能解释大公司为什么要这样做吗？

3.洗衣服无论是机洗还是手洗，漂洗是一个必不可少的过程，而且要重复进行多次.在漂洗次数与水量一定的情况下,如何控制每次漂洗的用水量才能使衣物洗的最干净呢？

4.影子价格（也称最优计划价格）在企业管理中有广泛的应用，是企业管理者进行科学决策必须要参考的重要依据之一。试研究影子价格与拉格朗日乘数的关系.

（三）总结反思学案
思考、总结笔记：
（1）求偏导数及全微分方法的学习，扩展了你解决哪些问题的方法？（举例说明） （2）掌握了利用偏导数进行弹性分析、确定空间曲面的切平面及法线和解决相应的经济优化问题，扩展了你解决哪些问题的方法？（举例说明） （3）你在日常生活或你的专业学习中遇到了哪些经济优化问题？（举例说明）
自我反思、感悟笔记
（1）与前一章进行翻转课堂教学的学习比较，你认为自己的学习有改进吗？效率提高了吗？还有什么需要改进的？给自己打个分吧(满分 100 分). （2）本部分的学习，你在数学思想、方法方面收获了什么（或得到了什么启示）？
教师评价：