净增长

微积分第二基本定理

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

由导数的定义可知$f(x)$是$F(x)$关于x的变化率， 而$F(b)$-F(a)是$F(x)$在[a,b]上的净改变量，所以微积分第二基本定理又可表述为：

净增定理： 变化率的积分等于净增长，即

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

因此在经济学中由边际函数求总量的问题，比如由边际需求求总需求，由边际成本求总成本，由边际收益求总收益，由边际利润求总利润等等都可以用净增定理解决.

例1 某种商品的需求量Q是价格p的函数，该商品的最大需求量为2000，且需求量关于价格的变化率(即边际需求)为

$$Q'(p) = -2000 \ln 5 \left(\frac{1}{5}\right)^p$$

（1）求出需求量Q关于价格p的函数关系；

（2）当价格从p=1上涨到p=2时，需求量减小了多少？

解 （1） 由于需求量$Q(p)$是$Q'(p)$的原函数，故

$$Q(p) = Q(0) + \int_0^p [-2000 \ln 5 \left(\frac{1}{5}\right)^t]dt$$

$$= 2000 + 2000 \times 5^{-t}\Big|_0^p = 2000\left(\frac{1}{5}\right)^p.$$

（2）**方法1** 当价格从p=1上涨到p=2时，需求量减少的数量为

$$Q(1)-Q(2)=2000\left(\frac{1}{5}\right)-2000\left(\frac{1}{5}\right)^2=320.$$

方法2 用定积分计算，需求量减少的数量为

$$\int_1^2 -2000\ln 5\left(\frac{1}{5}\right)^t dt$$

$$=2000\times 5^{-t}\Big|_1^2=320.$$

例2 某工厂生产某商品在时刻 t 的总产量变化率为

$$x'(t)=100+12t \quad \text{（单位/小时）}$$

求由t=2到 t=4这两小时的总产量。

解 $$Q=\int_2^4 x'(t)dt=\int_2^4 (100+12t)dt$$

$$=[100+6t^2]_2^4=272$$

例3 设某产品的边际成本为 $C'(x)=4+\frac{x}{4}$ (万元/百台)，边际收入 $R'(x)=8-x$ (万元/百台)，求

(1) 产量由1百台增到5百台的总成本与总收入的增量；

(2) 产量为多少时，总利润最大？

(3) 已知不变成本 $C(0)=1$ (万元)，求出总成本、总利润与产量 x 的函数关系式；

(4) 求利润最大时的总成本与总收入.

解 (1) 产量由1百台增到5百台的总成本的增量为

$$\int_1^5 C'(x)dx=\int_1^5\left(4+\frac{x}{4}\right)dx$$

$$=16+\frac{x^2}{8}\Bigg|_1^5=16+3=19$$

产量由1百台增到5百台的总收入的增量为

$$\int_1^5 R'(x)dx = \int_1^5 (8-x)dx$$

$$= \left.(8x - \frac{x^2}{2})\right|_1^5 = 20$$

(2) 由$R'(x) = C'(x)$，即$8 - x = 4 + \frac{x}{4}$，得$x = 3.2$(百台)，且它是$L(x)$的唯一驻点，因此由实际意义知，当$x = 3.2$(百台)时，总利润达到最大.

（3） $C(x)=\int_0^x C'(t)dt+C(0)=\int_0^x\left(4+\frac{t}{4}\right)dt+1=4x+\frac{x^2}{8}+1$

$$L(x)=\int_0^x R'(t)dt-\int_0^x C'(t)-C(0)=8x-\frac{1}{2}x^2-4x-\frac{x^2}{8}-1$$

$$=-\frac{5}{8}x^2+4x-1$$

（4） 利润最大时的总成本为

$$C(3.2)=4\times 3.2+\frac{1}{8}\times(3.2)^2+1=15.08$$

因为 $L(3.2)=5.4$（万元），所以利润最大时的总收入为

$$R(3.2)=5.4+15.08=20.48$$