

存贷款问题

例1 (存款问题) 某储户在银行存入一笔资金, 其金额为 S_0 , 银行的利率为 r , 若用 S_t 表示 t 年末该储户的存款总额, 则 S_t 满足关系式为

$$S_{t+1} = S_t + rS_t$$

求 t 年末该笔资金的本利和。

解 将 $S_{t+1} = S_t + rS_t$ 改写为 $S_{t+1} - (1+r)S_t = 0$,

此方程为一阶常系数齐次线性差分方程。可求得其通解为

$$S_t = C(1+r)^t \quad (C \text{ 为任意常数})$$

由于 $S_t|_{t=0} = S_0$, 由此可求得 $C = S_0$,

故 t 年末的本利和为 $S_t = S_0(1+r)^t$ 。

例2 (教育储蓄问题) 某家庭从现在着手, 把每月工资中的一部分资金拿出存入银行, 以用于将来子女教育, 并计划20年后开始从投资账户中每月支取2000元, 直到10年后子女大学毕业且用完全部资金. 假设银行的月利率为0.5%, 要实现这个投资目标, 20年内共要筹措多少资金? 每月要在银行存入多少金额?

解 设第 t 个月投资账户的资金为 y_t , 且每月存入资金为 a 元.

- 要搞清楚: (1) 20年后资金的变化情况;
(2) 20年内资金的变化情况.

(1) 从第20年结束时算起的10年内, 该家庭账户资金 y_t 应满足如下的差分方程为

$$y_{t+1} = 1.005y_t - 2000, y_{120} = 0 \quad (1)$$

此方程为一阶常系数非齐次线性差分方程. 其通解为

$$y_t = C \times 1.005^t + \frac{2000}{1.005 - 1} = C \times 1.005^t + 400000 \quad (C \text{ 为任意常数})$$

将初始条件 $y_{120} = 0$ 代入通解中可求得 $C = -\frac{400000}{1.005^{120}}$.

即方程(1)的特解为 $y_t = -219853 \times 1.005^t + 400000$

由此可得 $y_0 = 180147$, 即从现在算起, 第20年结束时投资帐户的资金需达到180147元.

(2) 从现在起的20年内, 该家庭第 t 个月账户资金 y_t 应满足的差分方程为

$$y_{t+1} = 1.005y_t + a, \quad y_0 = 0 \quad (2)$$

可求得此方程的通解为

$$y_t = C \times 1.005^t + \frac{a}{1-1.005} = C \times 1.005^t - 200a$$

将初始条件 $y_0 = 0$, 代入通解中可得 $C = 200a$,

故(2)的特解为 $y_t = 200a \times 1.005^t - 200a$,

又由于 $y_{240} = 180147$, 所以有

$$180147 = 200a \times 1.005^{240} - 200a$$

解之得 $a=389.89$, 即平均每月要存入 389.89元.