主题名称	函数的连续性	相关知识点	函数极限
所属课程	高等数学	授课时长	1 学时，45 分钟
授课对象	大一国财务类专业	教学资源	多媒体
参考教材 章节位置	《高等数学及其应用》第二版 第 2 章 极限与连续 2.4 节 函数的连续性		

学情分析

本课的教学对象是国财务类专业大一年级，教学班级规模 120 人。本节教学在函数极限学习之后，此时学生对极限求法有了较好的理解。但由于各地区的教育差异及学生文理科的不同，导致学生的基础参差不齐，部分同学对数学有很好的兴趣，能积极探索问题本质及归纳解题技巧；但部分同学数学基础能力较弱，对抽象概念的理解不到位，缺乏对纯数学概念的学习兴趣。

学生通过前面极限内容的学习，已经理解了函数极限概念的本质，并掌握了极限的计算，对在此基础上建立的函数连续性的概念就容易接受和理解了。

教学目标

知识目标

要求学生理解函数在一点处连续的两种定义的等价形式，掌握函数在一点处连续性的判定方法。

能力目标

(1)培养学生由浅入深的逻辑思维能力，由抽象到具体的概括、运用能力。

(2)培养学生用数学的思维方式观察和分析实际生活中的问题，进一步加深数学服务于生活更来源于生活的认识，养成科学的思维习惯，培养学生勇于探索的科学精神，提高解决问题的能力。

情感态度目标

揭示函数连续性实质的同时，渗透客观世界中连续与不连续等辩证唯物主义思想，通过师生之间课堂交流，教师引导学生发现数学问题，并解决数学问题。体现学生相对独立“首创”得到新知识，又相互感染和学习，培养团队协作的精神。通过讲解法国数学家柯西的故事，激发同学们对新知识的不懈努力和追求。

教学重点

由于函数连续是建立在函数极限基础上，又是后一章导数的基础，同时也是微积分学主要研究连续函数（按段连续）的铺垫，因此，函数的连续性概念是本节课的重点。

教学难点

由于函数的连续性概念较为抽象，学生对于函数在一点处的连续性概念是本节课的难点。

教学方法

充分发挥多媒体的直观、形象的动态功能，教学中结合直观图形，充分利用数形结合，让学生实现由具体到抽象，由感性到理性的认识。加深学生对学习在一点处函数连续定义的理解，通过数形结合减轻学习负担，突出重点，突破难点。

采用引导发现式，变讲授为导学，让学生学会思考和学习。

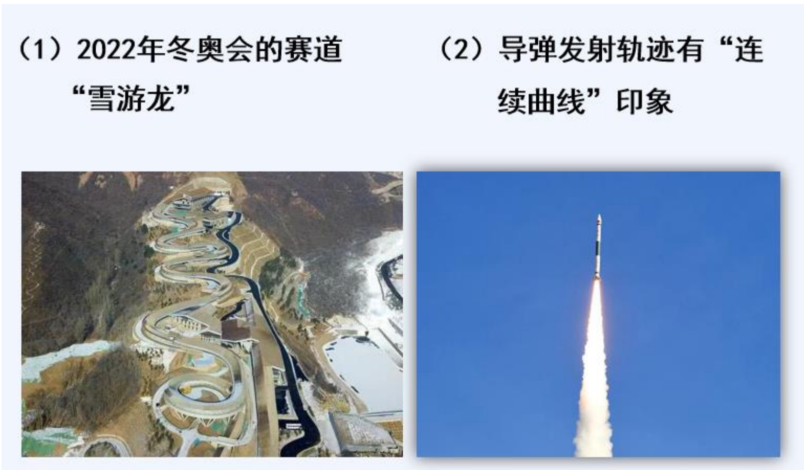
学习是一种建构的过程，是一种活动的过程，学习必须处于丰富的情境之中，因此教师通过学生的观察、分析、比较、抽象和概括，促使学生对于函数的连续性概念表述的严谨性做出探索，从而把传授知识和培养能力融为一体。

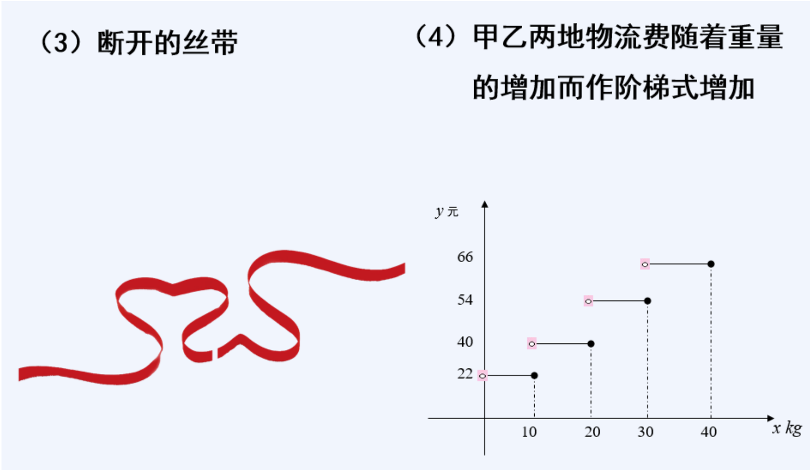
教学内容与过程

一、创设情境，兴趣导入(3 分钟)

连续顾名思义就是接连不断，日常生活中有许多连续变化的现象，例如植物的生长，气温的变化等等。具有接连不断这种性质的现象在数学上如何刻画呢？

为了理解连续性，请同学们观察下面图片：





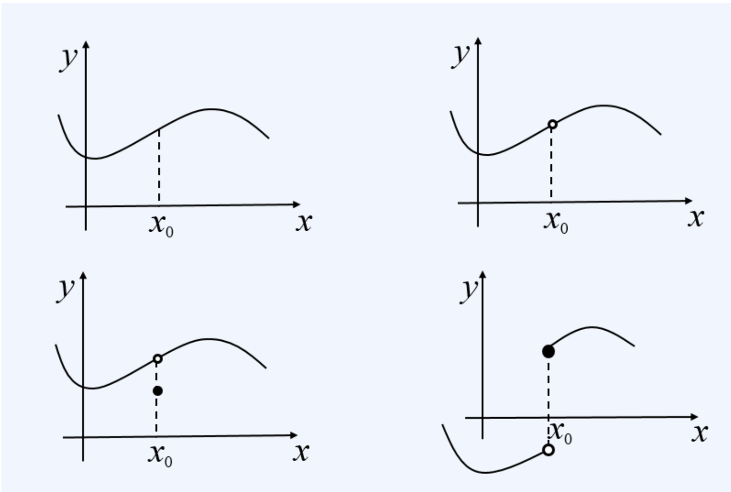
设计意图：

创设贴近生活的问题情境，反映数学的应用价值，结合形象思维与逻辑思维，如观察生活中的实例分析连续的特点，培养学生兴趣，激发学习热情，体会数学无处不在，体会数学之美。

二、几何分析，归纳特征(2 分钟)

上述变化过程的函数图像

观察对照后，抽象出(1)(2)(3)(4)轨迹（图像）规律，并置于直角坐标系下考虑：



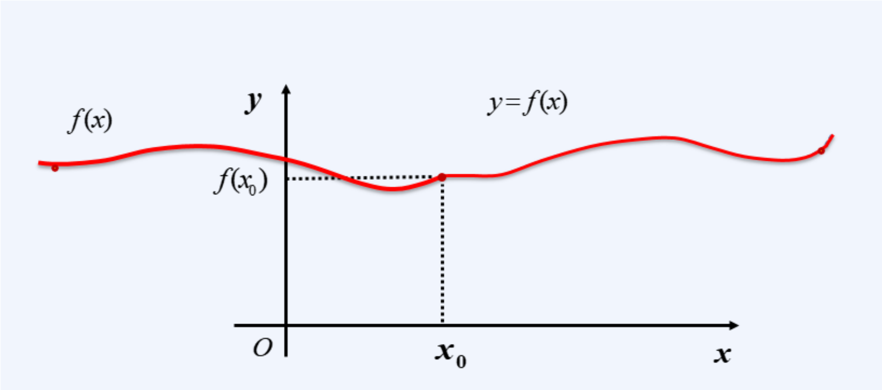
设计意图：

通过几何直观和对比观察研究，引导学生探索并归纳出函数曲线连续性的特征，建构连续的认知基础。从而总结归纳函数连续性的特征，引出下面问题。

三、数形结合，概念讲授(17 分钟)

问题提出：如何用准确的数学语言来描述函数的连续性呢？

1. 函数在一点处连续的定义



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

【概念探索】

(1)分析上述函数图像之间的区别与联系，抽象出上面图像(1)区别于后三者的本质，实现以极限方式刻画函数（图像）连续的本质；

(2)通过动画演示，结合函数在一点处的极限定义，具体得到：

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，并称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点。

【分析】定义中的三个条件：(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点函数值存在（邻域内有定义）；

(2) 极限值存在；

(3) 极限值等于函数值。

上述三条件称为连续的三要素，缺一不可！不满足上述三个条件中的任何一个，则称函数在该点不连续或称该点为函数的间断点。

例1.　试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$处连续。

【问题求解】引导学生利用函数连续性的定义证明上述结论。

【思考】请同学们总结验证函数 $f(x)$在点 x_0 连续的步骤。

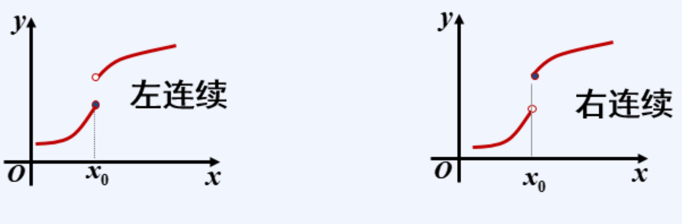
设计意图：

(1)通过对比观察分析，并结合曲线的连续特征归纳出函数连续性的定义，渗透数形结合思想。

(2)对于直观的函数图像，我们也可以从函数图像本身去简单识别连续与否。函数在一点处“路同则连续，路断则不连续”。

2. 左连续与右连续

【问题提出】因为极限可以用左右极限来定义，那么能否由左右极限引申到函数连续性的定义上呢？



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

通过动画演示，结合函数在一点处的极限存在当且仅当函数在一点处的左右极限都存在。得到函数左右连续的定义：

如果只考虑单侧极限，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处**左连续**；若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处**右连续**.

定理 1　函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$。

推论 1　函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充分必要条件是左连续且右连续。

设计意图：

通过对比极限存在的充要条件，引导学生自主给出连续的充要条件，渗透理论的前后一致性，引导同学们大胆提出结果，提高同学们的逻辑思维能力。

例 2　已知函数 $f(x) = \begin{cases} a - x, & x \geq 0, \\ 1 + \sin x, & x < 0, \end{cases}$ (a 为常数)在点 $x = 0$ 处连续，求 a 的值。

解：函数值 $f(0) = a$，

左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (1 + \sin x) = 1$，

右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (a - x) = a$，

已知函数连续，所以由定理 1 得

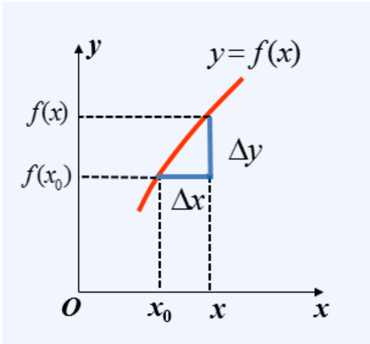
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$。

因此，$a=1$。

【课堂练习】设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x<0 \\ k, & x=0 \\ \dfrac{\sin 2x}{x}, & x>0 \end{cases}$ 是连续函数，求 k 的值。

【问题提出】能否由函数增量来定义函数的连续性呢？

3. 等价形式——函数在一点处连续的第二定义



若令 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则当 $x\to x_0$ 时，$\Delta x\to 0$，于是有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0$$

这里称 Δx 为自变量 x 的改变量，称 Δy 为函数 $f(x)$ 的改变量。于是我们可得到函数在 x_0 处连续定义的另一形式。

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

定义解释：自变量在 x_0 点的增量为无穷小时，函数的增量也为无穷小，形象地表示了函数连续性的特征。

【知识拓展】介绍函数连续性的数学进程，其中最重要的代表人物柯西(Cauchy, 1789—1857)是法国数学家、物理学家、天文学家。展示数学家的穷追不舍、孜孜以求的探索真理的治学精神，激发学生的学习兴趣。作为微积分的收关之人，纠正了前人的所有错误，呈现了我们现在学习的微积分，柯西在高等数学中的作用举足轻重，这种精神值得我们一起去学习。

设计意图：

两种形式的定义从不同角度刻画了函数连续的本质，启发学生多思多练，寻找使用两种形式时各自的方便之处。

四、连续启发，层层推进(10 分钟)

【问题提出】能否由函数在一点处的连续性推广到函数在区间内（区间上）的连续性呢？

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都连续，则称函数 $f(x)$ **在区间** (a,b) **内连续**，并称 (a,b) 为 $f(x)$ 的**连续区间(continuity interval)**。如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，并在左端点 a 处右连续，在右端点 b 处左连续，则称 $f(x)$ **在区间** $[a,b]$ **上连续**。

从几何上看，在一个区间内每一个点都连续的函数，其图形应该是没有中断的，这时可以一笔画出其图像。

例 3　已知 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin x+a & , \quad x<0\\ b & , \quad x=0\\ x\sin\frac{1}{x} & , \quad x>0\end{cases}$（$a,b$ 为常数）在 $x=0$ 处连续，求 a 和 b。

解：　由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，于是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=b$ 当然有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=b$$

而 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{1}{x}\sin x+a)=1+a$， $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0$

所以 $1+a=0=b$，即 $a=-1$， $b=0$。

【问题分析】

对比观察函数在点 0 处的极限，逐层发问，采用连续启发式教学进行推导，让学生自解其惑。

设计意图：

采用连续启发式分析问题，更有利于学生对函数连续性的掌握。层层推进的教学方式，使学生对数学知识的学习更具趣味性。

五、拓展深化，强化训练(10 分钟)

例 4　证明函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

【分析】　证明函数在区间上的连续性，我们一般选取的方法是连续的第二定义。

证　　设 x_0 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上任意取定的一点，当自变量 x 在点 x_0 处有改变量 Δx 时，函数相应的改变量为

$$\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})$$

由于 $\left|\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\right|\le 1$，而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=0$，因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}|\Delta y|=\lim\limits_{\Delta x\to 0}|2\sin\frac{\Delta x}{2}||\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})|=0$ 即有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})=0$

于是由定义知，$y=\sin x$ 在 x_0 处连续。又因 x_0 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意点，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

学生自己推导证明，**基本初等函数在其定义域内都是连续的**。实际上，从前面讲到的六种基本初等函数的图形也可以看出，它们在其定义域内是一条连续的曲线。

【拓展练习】讨论函数 $f(x)=\begin{cases}1+\cos x & , \quad x\le 0\\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x} & , \quad x>0\end{cases}$ 在其定义域内的连续性。

设计意图：

通过对一般初等函数连续性的讨论，训练和培养学生的逻辑思维能力，使学生寻找新旧知识之间的联系，从而能够更好地理解结论，并形成言之有理，论证有据，治学严谨的素养。

六、小结概念，总结方法(3 分钟)

1. 函数在一点处连续的定义；
2. 判定函数在一点处是否连续；
3. 由一点处的连续，我们可以定义区间内函数连续问题。

【思考】(1) 基本初等函数在其定义域内连续吗？

(2) 在一点处的不连续如何定义？

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}a+x & x\ge 0\\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x} & x<0\end{cases}$，应当怎样选择 a，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

【课后作业】　课本 100 页 4, 5(1) (4)

【课外拓展】　请同学们查阅柯西的故事，看看在初等数学的一两个应用，感受数学家的伟大成绩。

【下节预习任务】　(1)连续函数的运算性质；(2) 闭区间上连续函数的性质；(3)间断

点的定义。

七、板书设计，条理清晰

力求条理清楚，便于学生从整体上认识、理解函数连续性的概念及其判别函数是否连续。

1. 连续的第一定义 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2. 连续的第二定义 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

3. 区间内连续函数定义：端点的连续性

4. 证明方法
- **分段函数：第一定义**
- **连续函数：第二定义**

教学总结

函数的连续性是函数极限中的重要内容之一。在微积分学中，我们主要研究的是连续函数，而连续的概念是建立在函数极限基础之上的。函数连续性的定义得出充分利用了函数图像的直观性，将图像中的直观感受以量化（即极限方式）加以刻画，体现了数形结合的基本思想。在学习了函数极限定义以后，以极限思想来刻画函数的连续性，化未知为已知，变新知为旧知，既承上启下，又顺理成章。本课内容对于培养学生逻辑推理能力和探索精神以及创新意识具有重要意义。

通过多媒体展示了现实生活中连续与不连续的几个实例，从客观世界存在的连续现象引导学生自主思考连续的数学含义，通过逻辑推理和几何直观分析等多种手段，引导学生分析和构造函数连续的定义，这正是建构主义的处理方式。

本节课是在假设学生已经掌握函数极限基础上讲授的，因此对于函数极限运算不熟悉的同学，在用定义判断函数连续性时，会带来一些困难。从学生的角度来呈现数学思想的建构过程，尽量采用符合同学们思维习惯的、易于接受的讲授方式，数形结合。这种方法减轻了学生负担，又强化理解了连续本质。由于学生在前期较好的掌握了函数极限定义后，而连续的数学定义是函数极限的运用和延伸，学生容易掌握，课堂反映较好。

函数的连续性，就像同学们学习知识一样，又像老师们讲授知识一样：生命不息，学习不止。在高数的整个学习体系中，我们围绕的一条主线是：微积分。在这条主线上，同学们所学习的知识都是由前人不断的努力和探索获得的，而这些伟大的人物也是连续传承的：他们既是老师，也是学生，一代代传承着教与学的内涵。我们选取了部分的历史人物进行描绘，即从微积分的创始人——牛顿和莱布尼茨开始：

$$\begin{cases} \text{莱布尼茨} \to \text{伯努利} \to \begin{cases} \text{欧拉} \to \text{拉格朗日} \to \text{柯西} \to \text{高斯} \to \text{黎曼} \\ \text{洛必达} \end{cases} \\ \text{牛顿} \to \begin{cases} \text{泰勒} \\ \text{麦克劳林} \end{cases} \end{cases}$$

通过介绍数学家的故事，让同学们感受到所有伟大的人物对于历史的推动作用，转到中国历史来看，为什么中国选择了共产党？为什么中国选择了社会主义？这是人民的选择，是领袖毛泽东根据我国的基本国情的选择。实践表明：中国共产党领导下的中国顺应了历史的发展，在历史的长河中生生不息。使得同学们在情感上产生共鸣，产生血浓于水的亲和力，增强民族自豪感。这也是结合本节内容，对同学们进行思政教育的切入口。

融入历史重现、数学大师领悟和应用典范，让学生感受数学的研究背景和重大成就；巧设思考拓展，培养学生的创新意识与应用能力。