讨论题 9：最优批量采购问题

以下为你提供两个参考答案，一个侧重于**经典的 EOQ 经济订货量模型**，另一个侧重于**考虑缺货成本或价格折扣的扩展模型**，并附带了课堂引导建议。

参考答案一：经典 EOQ 模型——订货成本与存储成本的平衡

困惑描述：

某超市采购经理面临一个难题：某种饮料年需求量稳定在 10000 箱。每次向厂家订货，无论订多少箱，都要支付一笔固定的订货费（如运输、手续等）500 元。但饮料不能一次全拉回来，因为仓库租金很贵，每箱一年的存储成本是 10 元。经理困惑：每次应该订多少箱，才能使一年的总成本最低？

数学模型的解读：

1. **问题的数学抽象**
   设年需求量为 D，每次订货费为 S，单位商品年存储成本为 H，每次订货量为 Q。总成本 $TC(Q)$由两部分组成：
   - **年订货成本**：一年订货次数为 $\frac{D}{Q}$，每次费用 S，所以订货总成本为 $\frac{D}{Q}\cdot S$。
   - **年存储成本**：平均库存量为 $\frac{Q}{2}$(假设库存均匀消耗)，所以存储成本为 $\frac{Q}{2}\cdot H$。

     因此：

$$TC(Q)=\frac{D}{Q}\cdot S+\frac{Q}{2}\cdot H$$

2. **寻找最优解**
   这是一个关于 Q的函数。当 Q很小时，订货次数太多，订货成本很高；当 Q很大时，库存积压太多，存储成本很高。最优解就在两者之间。
   对 $TC(Q)$求导，并令导数为 0：

$$TC'(Q)=-\frac{D}{Q^2}\cdot S+\frac{H}{2}=0$$

解得：

$$Q^*=\sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

这就是著名的**经济订货量公式（EOQ 公式）**。

3. **代入数值**
   已知 $D=10000$箱，$S=500$ 元，$H=10$ 元，代入：

$$Q^*=\sqrt{\frac{2\times 10000\times 500}{10}}=\sqrt{1000000}=1000\text{ 箱}$$

即每次订 1000 箱，一年订 10 次，总成本最低。

4. **最低总成本**

此时：

- 订货成本 $= \frac{10000}{1000} \times 500 = 5000$元
- 存储成本 $= \frac{1000}{2} \times 10 = 5000$元

  总成本 $TC = 5000 + 5000 = 10000$元。
  有趣的是，最优解处订货成本恰好等于存储成本。这不是巧合，而是这类问题的共同特征。

5. **敏感度分析**
   如果订货量不是精确的 1000 箱，成本会增加多少？比如订 800 箱或 1200 箱，计算总成本会发现，偏离最优解一定范围，成本增加并不显著。这说明 EOQ 模型具有一定的**鲁棒性**。

课堂引导语：
“这个公式告诉你，每次订 1000 箱是最省钱的。订少了，频繁订货的运费受不了；订多了，仓库租金受不了。数学帮你找到了那个平衡点。而且你看，在最优解那里，订货成本和存储成本正好相等——这就像天平两端，平衡时两边一样重。”

参考答案二：考虑价格折扣的扩展模型——多买打折，但库存也多了
困惑描述：
同样是那个经理，这次厂家给出了新政策：如果一次订货量达到 2000 箱以上，每箱价格可以打 9 折（原价 20 元/箱，折后 18 元/箱）。经理动心了，但犹豫：多买虽然单价便宜，但库存成本也上去了。到底该不该为了折扣加大订货量？
数学模型的解读：

1. **原 EOQ 模型回顾**
   原问题中，EOQ 算出来是 1000 箱，总成本（不含货价）10000 元。但别忘了，还有商品本身的采购成本：

$$\text{总成本（含货价）} = D \cdot P + \frac{D}{Q} \cdot S + \frac{Q}{2} \cdot H$$

其中 P是单价。原问题中 $P = 20$，年采购成本 $= 10000 \times 20 = 200000$元，总成本 $= 200000 + 10000 = 210000$元。

2. **价格折扣的引入**
   现在，厂家给出**批量折扣**：
   - 当 $Q < 2000$时，单价 $P = 20$元。
   - 当 $Q \geq 2000$时，单价 $P = 18$元（打 9 折）。

     这时，总成本函数变成了**分段函数**：

$$TC(Q) = \begin{cases} 10000 \times 20 + \dfrac{10000}{Q} \times 500 + \dfrac{Q}{2} \times 10, & Q < 2000 \\ 10000 \times 18 + \dfrac{10000}{Q} \times 500 + \dfrac{Q}{2} \times 10, & Q \geq 2000 \end{cases}$$

3. **分段优化策略**
   步骤 1：计算第一段（无折扣）的最优解。EOQ 公式告诉我们，在无折扣区间内，最优解是 $Q^* = 1000$箱。代入第一段总成本公式：

$$TC(1000) = 200000 + \frac{10000}{1000} \times 500 + \frac{1000}{2} \times 10 = 200000 + 5000 + 5000 = 210000 \text{ 元}$$

步骤 2：考虑折扣区间。折扣区间要求 $Q \geq 2000$。但在这个区间内，总成本函数仍然是凸函数，其导数零点（不考虑折扣门槛）还是 1000？不，因为单价变了，存储成本 H是否改变？注意，存储成本通常按库存资金占用计算，如果单价降低，存储成本可能也会降低（因为资金占用少了）。假设 H与单价挂钩，即 $H = r \times P$，其中 r是存储费率（比如 $r = 0.5$）。原问题中 $H = 10$对应 $P = 20$，说明 $r = 0.5$。折扣后 $P = 18$，则 $H = 0.5 \times 18 = 9$元。折扣区间内的 EOQ（不考虑门槛）为：

$$Q^*_{discount} = \sqrt{\frac{2 \times 10000 \times 500}{9}} \approx \sqrt{1111111} \approx 1054 \text{ 箱}$$

但 1054 箱不在折扣区间内（因为要 ≥ 2000才能享受折扣）。所以折扣区间内的可行解只能从边界点开始考虑。由于总成本函数在折扣区间内是递增还是递减？我们需要检查 $Q = 2000$这一点。

步骤 3：计算 $Q = 2000$时的总成本：

$$TC(2000) = 180000 + \frac{10000}{2000} \times 500 + \frac{2000}{2} \times 9 = 180000 + 2500 + 9000 = 191500 \text{ 元}$$

步骤 4：比较。

- 无折扣最优：$TC(1000) = 210000$ 元
- 折扣边界：$TC(2000) = 191500$ 元

  显然，$191500 < 210000$，所以应该选择 $Q = 2000$箱，享受折扣。

4. **结论与洞察**

   虽然订 2000 箱比 EOQ 建议的 1000 箱多了一倍，库存成本从 5000 元涨到了 9000 元（增加了 4000 元），但采购成本因为单价降低节省了 20000 元（10000×2），净节省 16000 元。所以，当折扣足够大时，值得牺牲 EOQ 的平衡点。

5. **更复杂的折扣模式**

   现实中还有**递增折扣**（订得越多，折扣越大）和**总量折扣**（全年累计采购量达到一定额度后享受折扣）。这些都需要更精细的数学分析，但核心思想不变：比较边际收益与边际成本。

课堂引导语：

“EOQ 公式告诉你要订 1000 箱，但厂家说订 2000 箱就打折。你怎么选？数学告诉你：不要死守公式，要重新算账。订 2000 箱，库存成本涨了 4000，但采购成本省了 20000，净赚 16000。这就是数学决策的魅力——它不给你教条，而是给你算账的工具。”

给老师的总结升华建议

在学生们讨论完这两个例子后，你可以帮他们梳理出最优批量采购问题的**核心数学思想**：

模型类型	数学工具	决策变量	权衡对象	适用场景
经典 EOQ	导数求极值、凸函数	每次订货量 Q	订货成本 vs 存储成本	单价固定、需求稳定
批量折	分段函数、边界点比	每次订货量 Q	单价优惠 vs 存储成本	供应商提供数量

模型类型	数学工具	决策变量	权衡对象	适用场景
扣	较		增加	折扣
允许缺货	导数、多变量优化	订货量 Q、缺货量	缺货成本 vs 存储成本	可接受缺货的情况
生产批量	导数求极值	生产批量	生产准备成本 vs 存储成本	自己生产而非外购

可拓展的课堂提问：

- 如果需求不是常数，而是随季节波动，如何调整订货策略？（引出动态规划）
- 如果存储成本与库存金额成正比，单价变化后存储成本如何调整？
- 多产品联合采购时，如何优化？（引出联合补货模型）
- 现实中除了成本和折扣，还有哪些因素影响采购决策？（引出供应商关系、资金周转等定性因素）