主题名称	极坐标系下二重积分的计算	**相关知识点**	二重积分
所属课程	高等数学	**授课时长**	1 学时，45 分钟
授课对象	大一经济类专业	**教学资源**	多媒体
参考教材 章节位置	《高等数学及其应用》第二版 第 9 章 重积分 9.2 节 二重积分的计算		

学情分析

学生已经学习了二重积分的定义，通过积分学中分割、近似、求和、取极限步骤，二重积分的值等于一个特殊和式的极限，然而在实际应用中要想利用这个特殊和式的极限来计算二重积分，在通常情况下却是很难办到的，因此需寻找更简单的计算二重积分方法。上节课我们学习了直角坐标系下二重积分的计算，但是对于一些特殊区域或复杂函数，直角坐标系下二重积分的计算并不是很有效，或者根本算不出。本节讲述的极坐标系下二重积分的计算可解决当积分区域为圆域或者圆域的一部分时，或者被积函数为特殊情况时二重积分的计算。

教学目标

(1)掌握极坐标系下二重积分的计算法，熟练运用极坐标系求解积分区域为圆域或者圆域的一部分时的二重积分；

(2)掌握极坐标变换的同时，能联系前后学习的内容进行层次归纳与总结，形成系统的知识层次与结构；

(3)让学生体会数学研究与数学应用的乐趣，发展应用意识和解决问题的能力。

教学重点

极坐标系下二重积分的计算。

教学难点

积分区域的转化及积分限的确定。

教学方法

综合使用探讨式、启发式和讲授式的教学方法来完成教学内容。具体以情境教学和问题驱动为主要教学方法，由教师提出一系列环环相扣的问题，在教师的启发

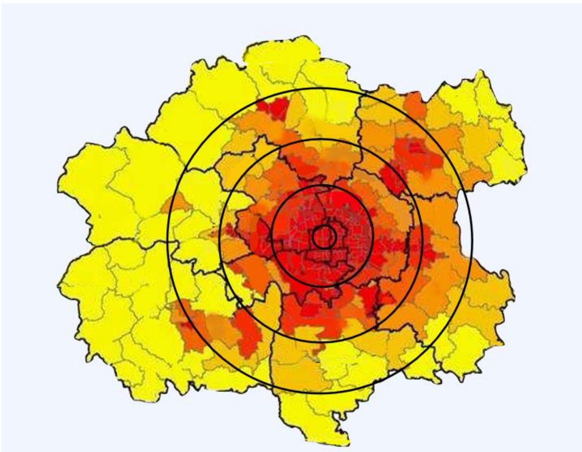
和引导下，学生自主分析、探索，并在探索的过程中掌握转化成极坐标系下的二重积分的计算。

教学内容与过程

一、 创设情境，兴趣导入（5 分钟）

请同学们先分析如下模型：

人口统计模型　在对人口统计中发现，每个城市的市中心人口密度最大，离市中心越远，人口越稀少，密度越小。2016 年，某城市的人口密度为 $\rho(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$（万人/km^2），其中(x,y)是以某中心城市为原点所构建的直角坐标系下的区域内一点。试求距市中心 $a\ km$ 区域内的人口数。



【分析】我们知道了人口密度函数，其中(x,y)是以某中心城市为原点所构建的直角坐标系下的区域内一点。考虑到人口总数是区域面积和人口密度的乘积得到的，那么区域 D 内的人口总数可以通过下面积分得到：

$$\iint_D \rho(x,y)d\sigma$$

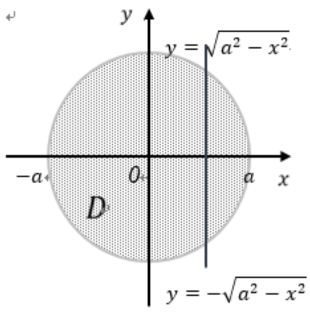
因此问题转化为：

计算 $\iint_D e^{-x^2+y^2}d\sigma$　其中 $D: x^2+y^2\le a^2$

解：直角坐标系下计算二重积分，

X-型区域：$\iint_D e^{-x^2+y^2}d\sigma=\iint_D e^{-x^2+y^2}dxdy$

$=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}e^{-(x^2+y^2)}dy$



$\int e^{-y^2}dy$ 无法用初等函数表示，无法计算；

Y-型区域：$\iint\limits_D e^{-x^2+y^2}d\sigma=\iint\limits_D e^{-x^2+y^2}dxdy=\int_{-a}^{a}dy\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}e^{-(x^2+y^2)}dx$

$\int e^{-y^2}dx$ 无法用初等函数表示，无法计算。

用直角坐标下二重积分的计算法无法求出上述二重积分。

【问题提出】如何计算此二重积分？

本节课将会解决这个问题，引出本节课的学习内容：极坐标系下二重积分的计算。

设计意图：

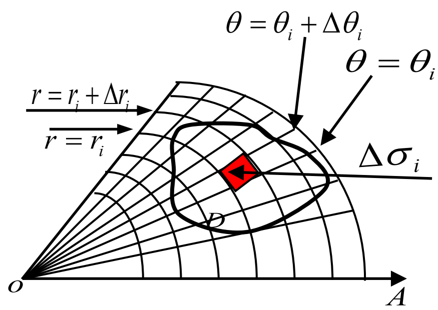
创设贴近生活的问题情境，反映数学的应用价值，激发学生思考，体会数学无处不在。由实例出发，对问题探究，更能激发学生兴趣。同时为极坐标系下二重积分的计算奠定实际背景。

二、几何分析，归纳方法（10 分钟）

1. 极坐标系下二重积分化二次积分的变换公式

按照二重积分的定义有 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，现研究这一和式极限在极坐标中的形式。

用以极点 O 为中心的一族同心圆 $r=$ 常数以及从极点出发的一族射线 $\theta=$ 常数，将 D 剖分成若干个小闭区域。除了包含边界点的一些小闭区域外，小闭区域 $\Delta\sigma_i$ 的面积可如下计算



$$\Delta\sigma_i=\frac{1}{2}(r_i+\Delta r_i)^2\Delta\theta_i-\frac{1}{2}r_i^{\,2}\Delta\theta=\frac{1}{2}(2r_i+\Delta r)\Delta r_i\Delta\theta_i$$
$$=\frac{r_i+(r_i+\Delta r_i)}{2}\Delta r_i\Delta\theta_i=\bar{r}_i\Delta r_i\Delta\theta_i$$

其中，$\bar{r}_i$ 表示相邻两圆弧半径的平均值。

（数学上可以证明：包含边界点的那些小闭区域所对应项之和的极限为零，因此，这样的一些小区域可以略去不计）

在小区域 $\Delta\sigma_i$ 上取点 $(\bar{r}_i,\bar{\theta}_i)$，设该点直角坐标为 (ξ_i,η_i)，由直角坐标与极坐标的关系有 $\xi_i=\bar{r}_i\cos\bar{\theta}_i$，$\eta_i=\bar{r}_i\sin\bar{\theta}_i$，

于是 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\bar{r}_i\cos\bar{\theta}_i,\bar{r}_i\sin\bar{\theta}_i)\cdot\bar{r}_i\Delta r_i\Delta\theta_i$，

即$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$.

由于$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$也常记作$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，因此，上述变换公式也可以写成更富有启发性的形式

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta \qquad (\#)$$

（#）式称之为二重积分由直角坐标变量变换成极坐标变量的变换公式，其中，$rdrd\theta$就是极坐标中的面积元素。

（#）式的记忆方法：

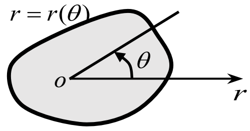
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy\Rightarrow\begin{cases} x\to r\cos\theta \\ y\to r\sin\theta \\ dxdy\to rdrd\theta\end{cases}\Rightarrow\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

连续启发，层层推进

2. 极坐标系下二重积分的计算法

极坐标系中的二重积分，同样可以化归为二次积分来计算。

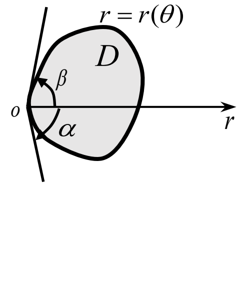
a)极点在积分区域D内，



$$D:0\le\theta\le2\pi,\ 0\le r\le r(\theta),$$

则$\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr\cdot$

b)极点在积分区域D的边界上，



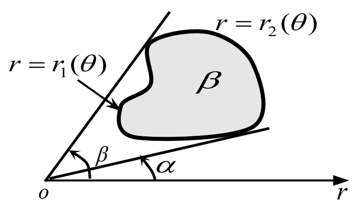
$$D:\alpha\le\theta\le\beta,\ 0\le r\le r(\theta),$$

则$\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr\cdot$

c)极点在积分区域D之外,

$$D:\alpha\le\theta\le\beta,\ r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta),$$

则$\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.



由上面的讨论不难发现，将二重积分化为极坐标形式进行计算，其关键之处在于：

将积分区域 D 用极坐标变量 r,θ 表示成形式 $\alpha \le \theta \le \beta$，$r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$.

设计意图：

以学生的常见思维角度提出问题，利用问题引导学生思考，通过问题将授课内容引出来，以便吸引学生的学习兴趣。

三、拓展深化，强化训练

回到前面的例题，例 1. 计算 $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ 其中 D：$x^2+y^2 \le a^2$ **（10 分钟）**

解： 在极坐标系下，积分区域变为 $\{(r,\theta)\,|\,0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le a\}$

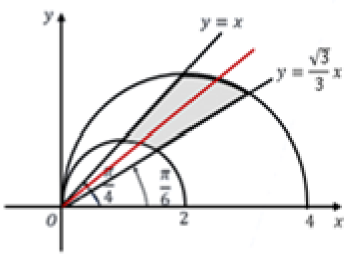
因此，二重积分变为

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint\limits_D e^{-r^2}rdrd\theta = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a e^{-r^2}d(-r^2) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(e^{-a^2}-1)d\theta$$

例 2. 计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ 其中 D 是由 $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x$ 及直线 $y=x, y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 围成的平面闭区域。

【分析】根据已知，画出积分区域，如图所示。



同学们尝试化成极坐标下记性进行计算。

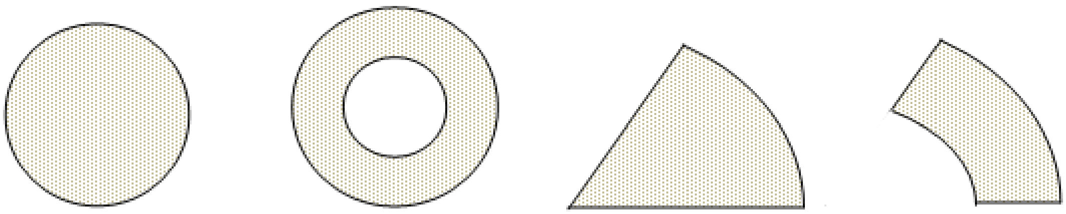
【问题提出】请同学们总结上述两道问题的积分区域特点。

上述两道例题，例 1 用直角坐标系下的二重积分计算不出来，例 2 用直角坐标系下的二重积分计算比较困难，对于上述两种情况我们考虑用极坐标系下的二重积分进行计算。由此归纳总结出：

【总结】使用极坐标系下二重积分计算的原则（17 分钟）

(1)积分区域为圆面、圆环、扇形或扇面等区域时，一般选择在极坐标下将二重积分

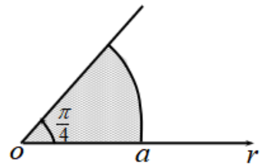
化为二次积分来计算；



(2)被积函数表示式用极坐标变量表示较简单（含 $(x^2+y^2)^\alpha$, α 为实数，或 $\frac{x}{y}$ ），也可采用极坐标系下二重积分的计算。

例 3. 计算二重积分 $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma$ ，其中 D 是由 $1\le x^2+y^2\le 4, y\ge 0, y\le x$ 围成。

解： 积分区域用极坐标表示为：



$$D=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{4},1\le r\le 2\}$$

于是 $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^2\theta r dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta d\theta\int_1^2 r dr=\frac{3}{64}\pi^2$.

【练习】 计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma$ ，其中 D 是由 $x^2+y^2\le x$ 围成。

【内容总结】 计算二重积分的关键是如何选择适当的坐标系以及根据积分区域进一步确定累次积分的上下限。综合上面的例题归纳、总结如下：

(1) 当积分区域为 X-型区域，Y-型区域或可分成若干个无公共内点的 X-型区域，Y-型区域时，一般选择在直角坐标系下将二重积分化为累次积分来计算；而当积分区域 D 为圆面、圆环、扇形或扇环等区域时，一般选择在极坐标系下将二重积分化为累次积分来计算。

(2) 在确定了坐标系后，最重要的环节就是根据积分区域的几何形状确定积分限。

(3) 积分次序的选择对二重积分的计算有较大影响。有时积分次序选择不合适，根本无法计算出积分值。因此还要根据被积函数的特点选择合适的积分次序。

设计意图：

采用连续启发式分析问题，更有利于学生对极坐标系下二重积分的计算的掌握。通过实例分析，培养学生观察、分析、比较和归纳能力。

四、小结概念，总结方法（3 分钟）

1. 二重积分极坐标下的计算公式

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr\,;$$

2. 使用极坐标系下二重积分计算的原则

【思考】写出积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 的极坐标二次积分形式，

$$D = \left\{(x,y) \middle| 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}, 0 \le x \le 1\right\}.$$

【课后作业】　课本 475 页　3, 4, 5

五、板书设计，条理清晰

力求条理清楚，便于学生掌握极坐标下二重积分的计算。

1. 二重积分极坐标下的计算公式

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr\,;$$

2. 极坐标系的变换公式。

教学总结

二重积分在高等数学中占有非常重要的地位，几乎触及到数学的各个范围。因此学会二重积分的计算方法特别重要。本节主要讨论了利用极坐标系化二重积分为累次积分的方法。通过实际问题引入，提高学生的学习兴趣。采用引导发现式，变教授为导学，让学生学会思考和学习，尽可能的调动学生学习的主动性和积极性。