主题名称	第二个重要极限	**相关知识点**	连续复利、极限
所属课程	高等数学	**授课时长**	1 学时，45 分钟
授课对象	国财务类专业一年级	**教学资源**	多媒体
参考教材章节位置	《高等数学及其应用》第二版 第 2 章　极限与连续 2.2 节　函数极限的性质及运算法则		

学情分析

极限理论引入之后，两个重要极限作为极限理论的基础内容，是解决极限问题的一种有效的方法，两个重要极限是研究初等函数求导公式的一个工具，在微积分的计算和整个微积分思想中起着举足轻重的作用。本课的授课对象是国际教育合作学院国财务类专业大一学生。在交流合作中，专业素养与知识基础是财务管理的基石，与数学有着十分密切的关系，很多现象和理论都能够用数学知识去解释。微积分作为数学知识的基础，是学习财务学的必备知识。极限概念是微积分中最基本的概念，因此，用极限思想方法指导财务学中相关概念的学习，对于掌握财务学中的重要概念有很大的帮助。

此前学生已经掌握了极限的概念和部分极限的运算方法。对于 e 这个特殊的无理数，学生知道它是自然对数的底，但又不知道它从何而来，了解甚少，对它充满了好奇。因此，通过推理和证明得到第二个重要极限的值为 e 时，同学们的思维能力，以及解决问题的能力都会加强。

教学目标

知识技能目标

了解第二个重要极限的知识背景。

数学方法目标

培养学生质疑问题、解决问题的能力和相关知识的迁移能力。

情感态度目标

专业问题的引入可以激发学生的学习兴趣，明确高等数学的实用性，体会数学思想和数学方法的精妙，进而培养学生主动探索和创新的科学精神。通过讲解欧拉的历史故事，提高同学们的热情，感受伟大人物对于历史，科学，政治的推动作用。

教学重点

正确理解第二个重要极限及其推广的变形式，并能运用公式及其变形式解决有关函数极限的计算问题。

教学难点

利用第二个重要极限求极限。

教学方法

第二个重要极限在财务管理中尤为重要。为了体现它的优势，本节课通过引用复利模型，把理论与实际相关联，采用启发式教学方法，探究式教学方法和迁移教学方法，构建以专业问题为背景的数学模型教会学生主动提出问题、研究问题和解决问题的能力，让学生步步深入教学内容，提高学习的效果，从而更助于学生掌握本节课的知识，加强应用能力。

教学内容与过程（五个步骤）

一、创设情境，兴趣导入（3 分钟）

通过介绍复利问题引入本课内容。

【问题提出】现有本金 $P_0=1$ 万元存入银行，假设年复利率为 $r=1$。如何计息，使得一年后的本息和最大？如果一年结息一次，本息和是多少？如果每半年结息一次，以及每月结息一次，或每天结息一次，本息和是多少呢？如果分分秒秒都在计息，本息和又是多少呢？

设计意图：

一方面有助于引起学习兴趣，让学生认识到今天所讲的重要极限非常有意义，从而激发其求知欲望；另一方面通过介绍复利问题，使学生初步体会认识重要极限在财务管理学中的应用。

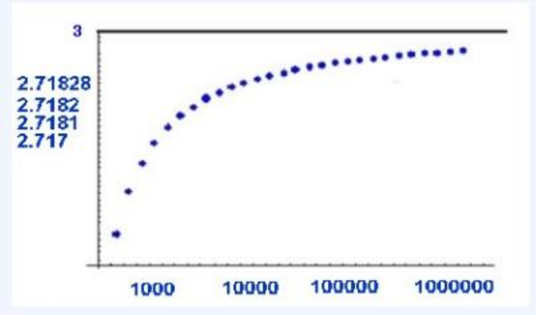
学生在如何解决此类问题的疑问下引出第二个重要极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=?$$

二、几何分析，归纳公式（4 分钟）

观察图表及动画：

n	1	2	12	365	1000	10000	100000	1000000	……
$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$	2	2.25	2.61	2.71	2.717	2.7181	2.7182	2.71828	……



【分析】 通过图形及表格，我们发现当 n 无限增大时，数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是逐渐增大的，但是不论 n 如何大，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的值有一个上界，总不会超过 3。

设计意图：

通过对 n 取一些特殊值，让学生体会数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 取值的变化趋势，引导学生自主分析这种趋势并进行归纳。利用取值变化表，让学生观察比值的变化趋势，并通过图像猜想，体会数形结合思想的作用。从而引出 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$.

三、连续启发，层层推进

1. 重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ 的推导（15 分钟）

通过准则 II（**单调有界数列必有极限**）完成重要极限初始型的证明，从而完成从直观感觉到认知水平的升华。

要证明一个数列的极限存在，首先我们假设 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$，现证明数列 $\{a_n\}$ 是单调有界的（即**单调增有上界**；或**单调减有下界**）。

通过二项式展开公式：$\boldsymbol{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k}$ ，得

$$a_n=(1+\frac{1}{n})^n$$

$$=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\cdot+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots\cdot+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}),$$

类比可得

$$a_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).$$

比较 a_n，a_{n+1} 的展开式，可以看出除前两项外，a_n 的每一项都小于 a_{n+1} 的对应项，并且 a_{n+1} 还多了最后一项，这一项的值大于 0, 因此 $a_n<a_{n+1}$，说明数列 $\{a_n\}$ 单调递增。

接下来只需要证明有上界即可。因为 a_n 的展开式中各项括号内的数都是 1 减去一个值，通过放缩，用较大的数 1 代替，得

$$a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

说明数列 $\{a_n\}$ 有上界。根据单调有界定理得，数列 $\{a_n\}$ 单调增有上界必有极限。这个极限我们用 e 来表示。 即

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e.$$

【教师引导】1728 年，瑞士数学家 Euler（1707-1783）首先用 e（自然数或欧拉数）表示这个极限。e 是个无理数，它的值是

e=2. 718281828459045···.

指数函数 $y=e^x$ 以及对数函数 $y=\ln x$ 中的底 e 就是这个常数。

【问题】上面的极限中的正整数 n 改为实数 x 会有同样的结论吗？是否存在 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$？如果成立，当 $x\to-\infty$, 是否存在 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$？

设计意图：

嵌入数学史，让学生了解数学大师发现重要极限的过程，感叹数学的伟大成就。

【分析】当$x\geq 1$时，由取整函数得，$[x]\leq x\leq [x]+1$，因此有下面的关系式成立：

$$\boxed{小^{小}\leq (1+\frac{1}{x})^{x}\leq 大^{大}}$$

即

$$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}\leq (1+\frac{1}{x})^{x}\leq (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}。$$

由夹逼准则，只需要得到左右两边的极限值为e，即可证明$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$。

左侧极限为：$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]+1})^{-1}=e,$

右侧极限为：$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})^{[x]}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{[x]})=e,$

因此，$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$。

当$x\to-\infty$时，令$x=-t,$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}&=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to+\infty}(\frac{t-1}{t})^{-t}=\lim_{t\to+\infty}(\frac{t}{t-1})^{t}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t}\\&=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}\cdot\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})=e.\end{aligned}$$

2. 公式剖析, 例题解析（15 分钟）

【问题提出】请同学们观察$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$特点。

【教师总结】(1)极限形式$x\to\infty$；(2)括号里面底数位置是$1+\frac{1}{x}$，趋近于 1，括号外指数位置是x，趋近于∞；(3)括号内外互为倒数。第二个重要极限可以推广为下面两个式子：

$$\lim_{\Box\to\infty}\left(1+\frac{1}{\Box}\right)^{\Box}=e\qquad\qquad \lim_{\Box\to0}(1+\Box)^{\frac{1}{\Box}}=e$$

【本质】(1)$1^{\infty}-$型未定式；(2) 内外互为倒数。

例 1.　求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

解:　令 $u=\frac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时，$u\to\infty$，于是有 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$.

例 2.　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$

解:　**原式**$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x\cdot(-1)}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}$

$$\overset{令-x=t}{=}\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-1}=e^{-1}.$$

例 3.　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{x}$

解:　令 $u=-\frac{2}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，$u\to 0$，于是有

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{x}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{-\frac{2}{u}}=\left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{-2}=e^{-2}.$$

例 4.　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{x}$

解:　因为 $\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^{x}=\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{x}$，令 $u=-\frac{3}{x+1}$，那么 $\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^{x}=(1+u)^{-\frac{3}{u}-1}$，于是有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{x}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{-\frac{3}{u}-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\left((1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{-3}}{(1+u)^{-1}}=e^{-3}.$$

此题也可以按下面方式做:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}}=\frac{e^{-2}}{e}=e^{-3}$$

熟练以后可以不引入中间变量。

【教师总结】应用重要极限求极限时，要抓住其本质（1^{∞}-型），即在趋近方式是 $\to 0$ 还是 $\to\infty$，都有:

$$\lim(1+零)^{\frac{1}{零}}=e$$

极限号下面没有写出自变量的变化趋势，因为那不是主要问题，关键是在自变量的变化趋势下是无穷小量，底数位置趋近于 1，指数位置趋近于∞。内外互为倒数（括号里面的分式与括号外的指数互为倒数，且括号里面的分式之前为“1+”）。

设计意图：

让学生体会第二个重要极限探讨的必要性，在教师的引导下尝试，体会换元法、转化思想在数学解题中的重要作用。通过上面的例题再次强调重要极限内涵以及在做题时怎么凑成内外（强调括号里面是“1+”的情况下内外的具体含义）互为倒数。

【课堂练习】求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^x$．**（5 分钟）**

解：（方法 1）原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2+4}{x-2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x-2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{4}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{4}}\right]^4\left(1+\dfrac{4}{x-2}\right)^2$

$=e^4$.

（方法 2）原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}\right)^x=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x}=\dfrac{e^2}{e^{-2}}=e^4$.

【拓展练习 1】$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$

【拓展练习 2】$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\dfrac{2x}{t})^t(t\neq0)$，求 $f(\ln 2)$

设计意图：

及时练习，巩固学生对重要极限内涵的理解。

四、小结概念，总结方法（3 分钟）

1.研究第二重要极限公式的意义；

2.应用第二重要极限公式解题的关键，要抓住其本质（1^∞-型），即在$\square\to0$下有：

$$\lim(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e$$

3. 公式拓展为下面两个公式：

$$\lim_{变量\to\infty}(1+\frac{1}{变量})^{变量}=e,\ 和\ \lim_{变量\to 0}(1+变量)^{\frac{1}{变量}}=e.$$

【课后作业】 课本 93 页 6(4)-(8)，9

【课外拓展】 [1]　Eli Maor 著.《e 的故事—一个常数的传奇》[M].北京：人民邮电出版社，2011 年.

[2]　陈仁政主编.《不可思议的 e》[M].北京：科学出版社，2005 年.

下节预习任务 函数极限的性质及运算法则

五、板书设计，条理清晰

1. 第二重要极限公式：1^{∞}−型

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{\boxed{}\to\infty}(1+\frac{1}{\boxed{}})^{\boxed{}}=\lim_{\boxed{}\to 0}(1+\boxed{})^{\frac{1}{\boxed{}}}=e$$

2. 应用第二重要极限关键：

判断类型、做变形

教学总结

本次授课利用连续复利问题，通过设计问题情境，引出第二个重要极限，有助于提高学生的学习兴趣，引导学生自主形成幂指函数模型的意象表征。通过对实际问题的观察，对表格与图像的分析讨论、探索、猜想，让学生进行归纳提炼，在探究中进一步形成重要极限公式的心理表征，培养学生观察，归纳，严格证明的学习方法，且进一步认识转化思想在数学解题中的作用。

本节课重点在于第二个重要极限的证明和应用，当提出第二个重要极限为 e 时，接着引入数学家欧拉的故事。欧拉不到 10 岁自学《代数学》，13 岁考入巴塞尔大学，拜师伯努利；15 岁大学毕业；16 岁硕士毕业；从 19 岁到 76 岁，欧拉一生共写下了 886 篇书籍和论文，内容涉及代数、几何，数论、分析、力学、天文学、航海学、建筑学等多个领域。作为法国科学部主任，由于工作废寝忘食，也不顾身体健康，59 岁时，发烧导致双目失明，不得不退任科学部主任一职。后来去了前苏联，受到女皇的亲自迎接，推动了沙皇俄国的数学和军工的发展。**虽然说历史是人民创造的，但是英**

雄人物推动了历史的发展。甚至后来两国交战，都不允许打欧拉的住所，体现了世界对科学家的尊重。

通过介绍欧拉的故事，让同学们感受到所有伟大的人物对于历史的推动作用，转到中国历史来看，为什么中国选择了共产党？为什么中国选择了社会主义？这是人民的选择，是领袖毛泽东根据我国的基本国情的选择。实践表明：中国共产党领导下的中国顺应了历史的发展，在历史的长河中生生不息。使得同学们在情感上产生共鸣，产生血浓于水的亲和力，增强民族自豪感。这也是结合本节内容，对同学们进行思政教育的切入口。

融入历史重现、数学大师领悟和应用典范，让学生感受数学的研究背景和重大成就；巧设思考拓展，培养学生的创新意识与应用能力。