

主题名称	常数项级数的概念	相关知识点	数列、收敛、发散
所属课程	高等数学	授课时长	1 学时，45 分钟
授课对象	大一经济类专业	课程资源	多媒体
参考教材	《高等数学及其应用》第二版		
章节位置	第 10 章 无穷级数		
	10.1 常数项级数的概念和性质		
学情分析			
<p>数项级数的概念是微积分中一个基本的定义，是学习级数理论的一个基础。学生已经学过微积分学，有一定极限的思想，而且学生在高中学习过数列，等比数列前 n 项求和公式。这些知识为本节课的认识奠定了基础。由于学生认知能力的局限性，应从直观入手，从有限出发，激发其探求有限到无限的兴趣，从感性认识再上升至理性认识，进行知识建构。</p>			
教学目标			
知识目标			
理解无穷级数收敛、发散以及和的概念。			
能力目标			
培养学生由有限到无限的思维能力，进一步巩固极限的思维能力。			
情感态度目标			
问题的引入激发学生的学习兴趣，常数项级数的概念让学生体会有限和无限的辩证关系，体会数学思想的美妙。			
教学重点			
无穷级数收敛和发散的定义。			
教学难点			
数项级数的收敛与发散的判别。			
教学方法			
由于级数概念比较抽象，在教学过程中通过类比引入级数的概念，再采用实例引入、多媒体演示等方式突出差异，通过对比激发学生学习和形成学习动机，注重			

学生学习的自主性，再通过逐步引导，得到级数的概念。

本节课采用问题探究式的讲授教学法。以问题为载体贯穿教学过程，不断提出问题、分析问题、解决问题，且问题环环相扣。

教学内容与过程

一、创设情境，兴趣导入（3 分钟）

同学们可能有这样的体会，有些事物必须要放到一个无限的过程中，才能够认清它的本质。《庄子天下篇》中记载道“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，意思是说：一根一尺长的木棒，每天截取一半，从理论上讲，这样的过程可以无休止地进行下去，承载着我国古代物质无限可分的思想。很容易得到，第一天截取的长度为二分之一，第二天截取的长度为二分之一的平方，第三天截取的长度为二分之一的三次方，……第 n 天截取的长度为二分之一的 n 次方，……，这样持续进行下去。如果我们把每天截取的长度加起来，结果如何呢？这是一个无穷多个数相加的问题。从直观上来看，所有截下来的木棒，它们的长度加起来应该是原来整根木棒的长度，也就是 1 尺。在我们学习了常数项级数的概念后，将会揭晓答案。

【问题提出】任意无穷多个数字的和都是存在的吗？也就是说任意无穷多个数字相加的结果仍然是一个数字吗？

【问题结论】通过两个反例 $1+1+1+1+\dots$ ， $1-1+1-1+1-\dots$ ，得出结论，无限和可能存在，也可能不存在，无限和和有限和有着重大的区别。

设计意图：

创设问题情境，反映数学的应用价值。通过反例设计，激发学生兴趣，引导学生思考，体会数学无处不在。

二、问答结合，概念讲授（2 分钟）

【问题提出】在什么条件下无限和是一个确定的数？什么条件下无限和不是一确定的数？为了回答这个问题，将无限和抽象出来，从而得到今天要讲解的常数项级数的概念：

常数项级数的概念

设已给数列 $\{u_n\}$ ： $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ，则由这个数列构成的表达式

$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ 称为常数项无穷级数，简称常数项级数，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 。其中 u_n 叫做级数的通项或一般项。

设计意图：

由于级数概念比较抽象，在教学过程中通过类比引入级数的概念，再采用实例引入，引出概念。

三、连续启发，层层推进（5 分钟）

【概念探索】 有了这个概念，我们研究无限和是否等于一个确定数字的问题，就转化为研究级数是否等于一个确定的数字。为了回答这个问题，我们回到刚才的引例中，将探索阶段解决问题的方法提炼出来，得到通过求部分和数列的极限来判断级数收敛性的方法。从而有了下面两个定义：

部分和数列

作常数项级数的前 n 项和 $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ ， S_n 称为级数的部分和。从而得到一个新的数列：

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \cdots, \quad S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n, \cdots$$

级数收敛与发散

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S ，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，

这时极限 S 叫做级数的和，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ 。如果 $\{S_n\}$ 没有极限，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

四、拓展深化，加强理解（20 分钟）

例 1. 判别级数 $1+2+3+\cdots+n+\cdots$ 的敛散性。

【分析】 如果我们要想判断这个无穷级数的敛散性，就应该先求出它的前 n 项部分和 S_n ，这是我们高中数学学过的等差数列，根据等差数列的求和公式，容易求得前 n 项部分和 S_n 。

解：此级数的前 n 项部分和为

$$S_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(1+n)}{2}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, 因此该级数是发散的。

例 2. 判别级数 $1-1+1+\cdots(-1)^{n-1}+\cdots$ 敛散性。

【分析】 如果我们要想判断这个无穷级数的敛散性, 应该先求出它的前 n 项部分和 S_n .

解: 部分和数列 $s_1 = 1, s_2 = 1-1 = 0, s_3 = 1-1+1 = 1, \cdots$

因此, 当 n 为奇数时, $S_n = 1$, 当 n 为偶数时, $S_n = 0$, S_n 极限不存在, 所以这个级数也是发散的。

例 3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$ 的敛散性。

【分析】 如果我们要想判断这个无穷级数的敛散性, 就应该先求出它的前 n 项部分和 S_n , 这是我们高中数学学过的等比数列, 公比 $q = 1/2$ 。根据等比数列的求和公式, 容易求得前 n 项部分和 S_n 。前 n 项的部分和 $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ 。所以该级数收敛, 级数的和为 1, 验证了问题引入时的猜测是正确的。

例 4. 判别等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} (a \neq 0, q \neq 0)$ 的敛散性。

请同学们根据例 3 的思路, 试探索等比级数的敛散性。

【内容总结】 等比级数是收敛级数中最著名的级数。等比级数在判别无穷级数的收敛性、求无穷级数的和以及将一个函数展开为无穷级数等方面都有广泛而重要的应用。请同学们记住等比级数敛散性的结果。

设计意图:

通过对等比级数的讨论, 训练和培养学生的逻辑思维能力, 使学生寻找新旧知识之间的联系, 从而能够更好地理解级数敛散性判别。

五、连续启发, 层层推进 (12 分钟)

【问题提出】 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 那么数列 u_n 有什么特点?

引出级数收敛的必要条件:

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

例 5. 讨论调和级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ 的敛散性。

【内容总结】在平时敛散性判别时，一般利用必要性条件的逆否命题。

设计意图：

采用启发式分析问题，层层推进，更有利于学生对级数收敛必要性的掌握

六、小结概念，总结方法（3 分钟）

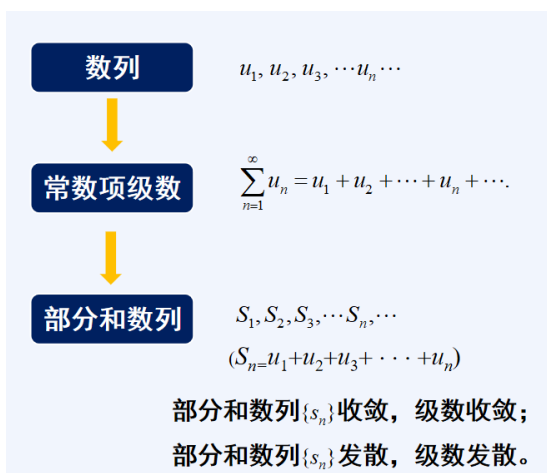
引导学生对本节课做出总结，使学生对学习内容有整体的把握。同时，为下节课讲解级数的性质埋下伏笔。

本节课学习了级数的概念，为了判断它的敛散性，我们又构造了前 n 项部分和数列。判别级数敛散性的实质是判别级数部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性，求级数的和实质上是求部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限，因此将级数的问题转化为数列的相应问题，是研究级数的一个基本思想。

【课后作业】课本 499 页 2, 3

七、板书设计，条理清晰

力求条理清楚，便于学生从整体上认识、理解无穷数项级数的收敛、发散、级数和。



教学总结

1. 无穷级数的概念以及无穷级数敛散性定义是分析严格化过程中的一个非常重

要的知识点。本小节内容的教学目的是让学生理解无穷级数敛散性定义，掌握无穷级数和部分和数列的关系。为下节无穷级数的敛散性判别法和函数项级数的学习打下基础。

2.由于级数概念比较抽象，在教学过程中通过类比引入级数的概念，再采用实例引入、多媒体演示等方式突出差异，通过对比激发学生学习和形成学习动机，注重学生学习的自主性，再通过逐步引导，得到级数的概念。

3.根据级数的定义，启发引导学生自己推导具体的等比数列敛散性的判定及求和公式。最后根据等比数列敛散性的判定再由一般到特殊，回到引例，对引例中的直观推测转变为理性理解。

4.结合问答法调动学生的创造性思维，引导学生积极思考，提高注意力，加深对本节课的理解。