

四、级数典型经济应用案例

级数作为高等数学中研究“无限项累加”的核心工具，在经济管理领域有着极为广泛且深刻的应用。从街头巷尾的商品议价，到金融市场的永续年金估值，从微观层面的消费者剩余测算，再到民生领域的房贷还款规划，级数理论都为这些经济场景提供了精准的量化分析框架与决策依据。

案例一：街头交易中的等比级数讨价还价模型

问题背景

某街头小贩销售手工帽子，初始开价 24 元，买家首次还价 12 元。双方约定“每次还价后，卖方与买方平分当前差价确定新报价”，即：卖方开价 24 元→买方还 12 元（差价 12 元）→卖方报 $12+6=18$ 元（平分 12 元差价）→买方还 $18-3=15$ 元（平分 6 元差价）……以此类推，直至双方接受最终价格。需确定该讨价还价过程的最终收敛价格，为交易双方提供决策参考。

建模步骤

- 定义变量与价格序列：设第 n 次报价为 P_n ($n = 0$ 时为卖方初始开价 24 元， $n = 1$ 时为买方首次还价 12 元)，差价序列为 $\Delta P_n = |P_n - P_{n-1}|$ ，观察差价变化规律： $\Delta P_1 = 12$ 元， $\Delta P_2 = 6$ 元， $\Delta P_3 = 3$ 元……呈现等比数列特征。
- 构建价格收敛的级数表达式：从买方首次还价 12 元开始，价格变化可表示为“初始还价+逐次调整量”，调整量交替增减且绝对值为差价的一半，即最终价格：

$$P = 12 + 6 - 3 + 1.5 + 0.75 + \dots$$

这是首项 $a = 6$ 、公比 $r = -0.5$ 的无穷等比级数与 12 的和。

求解过程

- 明确级数类型与收敛条件：该级数为无穷等比级数，公比 $|r| = 0.5 < 1$ ，满足收敛条件，收敛于 $S = \frac{a}{1-r}$ 。
- 计算级数和与最终价格：调整量级数和：

$$s = \frac{6}{1 - (-0.5)} = 4 \text{ 元}$$

因此最终收敛价格： $P = 12 + 4 = 16$ 元。

经济意义

该模型揭示“平分差价”讨价还价策略的均衡性：无论初始报价差异多大，只要每次调整量为差价的固定比例（此处 50%），最终价格会收敛于唯一均衡值。对卖方而言，可通过初始报价和调整比例预判最终成交价；对买方而言，可避免盲目还价，通过级数规律估算合理交易价格，减少谈判成本。

案例二：永续年金的现值计算

问题背景

某企业计划发行永续年金债券，承诺每年年末向债券持有者支付固定年金 1000 元，市场同类债券的年贴现率为 5%（即资金的年时间价值为 5%）。投资者需计算该永续年金的当前合理购买价格（即现值），判断债券发行价是否合理；企业需基于现值确定发行定价区间。

建模步骤

1. 定义核心概念与变量：永续年金指无限期持续支付的等额款项，现值（PV）是未来无限期现金流按贴现率折算的当前价值。设年年金为 $A = 1000$ 元，年贴现率为 $i = 5\%$ ，第 n 年现金流的现值为 PV_n 。

2. 拆分现值为级数形式：

$$\text{第 1 年年末现金流现值 } PV_1 = \frac{A}{1+i},$$

$$\text{第 2 年年末现值 } PV_2 = \frac{A}{(1+i)^2}$$

.....

$$\text{第 } n \text{ 年年末现值 } PV_n = \frac{A}{(1+i)^n},$$

$$\text{因此总现值为无穷等比级数： } PV = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{(1+i)^n}$$

求解过程

1. 确定级数参数：该级数首项 $a = \frac{A}{1+i} = \frac{1000}{1.05} \approx 952.38$ 元，公比 $r = \frac{1}{1+i} \approx 0.9524$ ，

且 $|r| < 1$ ，级数收敛。

2. 计算现值：根据无穷等比级数求和公式 $PV = \frac{a}{1-r}$ ，代入得：

$$PV = \frac{\frac{A}{1+i}}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{A}{i}$$

将 $A = 1000$ 、 $i = 5\%$ 代入，得：

$$PV = \frac{1000}{0.05} = 20000 \text{ 元。}$$

经济意义

永续年金现值公式 $PV = \frac{A}{i}$ 是金融领域核心工具：对投资者，若债券发行价低于 20000 元则存在投资价值；对企业，发行价需围绕 20000 元波动以吸引投资。该模型还可拓展至优先股股息定价、慈善基金设立等场景，如设立“每年捐赠 10 万元”的慈善基金，按 5% 贴现率需一次性投入 200 万元本金。

案例三：消费者剩余的幂级数估算

问题背景

某手机品牌市场调研显示，消费者对该品牌手机的需求函数为 $P = 10000 - 5Q - Q^2$ （ P 为价格， Q 为购买数量），当前市场售价为 6000 元/部。需计算消费者剩余（消费者愿意支付的最高总价与实际支付总价的差额），为企业定价策略和市场需求分析提供依据。

建模步骤

1. 确定实际购买量与需求函数展开：当 $P = 6000$ 元时，代入需求函数得：

$$6000 = 10000 - 5Q - Q^2$$

解得 $Q = 40$ （舍去负根）。消费者剩余（CS）为需求曲线下方、价格线上方的面积，即定积分：

$$CS = \int_0^{40} (10000 - 5Q - Q^2) dQ - 6000 \times 40$$

通过幂级数展开积分项，便于学生理解“无穷小量累加”本质。

2. 将积分拆分为幂级数和：根据定积分性质：

$$\int_0^{40} (10000 - 5Q - Q^2) dQ = \int_0^{40} 10000 dQ - 5 \int_0^{40} Q dQ - \int_0^{40} Q^2 dQ$$

利用幂函数积分公式 $\int Q^n dQ = \frac{Q^{n+1}}{n+1}$ （ n 为常数），可视为幂级数逐项积分的结果。

求解过程

1. 计算需求曲线下总面积：逐项积分得：

$$10000 \times 40 - 5 \times \frac{40^2}{2} - \frac{40^3}{3} = 40000 - 4000 - \frac{64000}{3}$$

$$\approx 40000 - 4000 - 21333.33 = 374666.67 \text{元}$$

2. 计算实际支付总价与消费者剩余:

$$\text{实际支付总价} = 6000 \times 40 = 240000 \text{元},$$

因此消费者剩余:

$$CS \approx 374666.67 - 240000 = 134666.67 \text{元}。$$

经济意义

消费者剩余 134666.67 元反映市场需求潜力: 消费者对 40 部手机的“心理最高总价”比实际支付高 13 万余元, 企业可通过差异化定价(如高端机型提价、入门机型降价)挖掘这部分剩余价值。该案例也印证“积分是幂级数求和的极限”, 帮助学生理解微积分与级数的内在联系。

案例四: 房贷分期还款中的级数求和应用

问题背景

某家庭购买住房, 向银行贷款 100 万元, 贷款期限 30 年(360 个月), 年利率为 4.8% (月利率 $i = 0.4\%$)。采用“等额本息”还款方式(每月还款额固定), 需计算每月还款额, 并分析还款总额中“本金”与“利息”的占比, 为家庭还款规划提供参考。

建模步骤

1. 定义变量与还款逻辑: 设贷款本金为 $P = 100$ 万元, 月利率 $i = 0.4\%$, 还款月数 $n = 360$, 每月还款额为 A 。每月还款额 A 的现值之和需等于贷款本金 P , 即每月还款额的现值构成有限等比级数:

$$P = A \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+i)^k}$$

2. 推导每月还款额公式: 有限等比级数求和公式为:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+i)^k} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

代入本金等式得:

$$A = \frac{P \times i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

求解过程

1. 代入参数计算每月还款额：将 $P = 1000000$ 、 $i = 0.4\%$ 、 $n = 360$ 代入公式，得

$$A = \frac{1000000 \times 0.004 \times (1.004)^{360}}{(1.004)^{360} - 1}$$

计算得 $(1.004)^{360} \approx 4.0188$ ，因此：

$$A \approx \frac{1000000 \times 0.004 \times 4.0188}{4.0188 - 1} \approx 5246.65 \text{元.}$$

2. 计算还款总额与本息占比：

还款总额 = $5246.65 \times 360 \approx 1888794$ 元，

其中利息总额 $\approx 1888794 - 1000000 = 888794$ 元，利息占比 $\approx 47.05\%$ 。

经济意义

该模型是民生金融的核心工具：对家庭而言，可通过公式测算不同贷款期限、利率下的还款压力，如缩短期限至 20 年，每月还款额增至 6544.44 元，但利息总额降至 570665.6 元，利息占比降至 37.91%；对银行而言，可通过调整利率和期限设计还款方案。案例中有限级数的应用，帮助学生理解“资金时间价值”的量化方法，衔接高等数学与金融实践。