

## 多元需求弹性

**定义** 若有甲、乙两种商品，其价格分别为  $p_1$ 、 $p_2$ ，需求量分别为  $Q_1$ 、 $Q_2$ ，需求函数分别为：

$$Q_1 = Q_1(p_1, p_2), \quad Q_2 = Q_2(p_1, p_2).$$

当乙商品的价格  $p_2$  保持不变而甲商品的价格  $p_1$  改变  $\Delta p_1$  时，甲商品的需求量  $Q_1$  随甲商品的  $p_1$  的变化而改变了

$$\Delta_{p_1} Q_1 = Q_1(p_1 + \Delta p_1, p_2) - Q_1(p_1, p_2),$$

$$\text{于是 } E_{11} = \lim_{\Delta p_1 \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta_{p_1} Q_1}{Q_1}}{\frac{\Delta p_1}{p_1}} = \lim_{\Delta p_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{p_1} Q_1}{\Delta p_1} \cdot \frac{p_1}{Q_1} = \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{Q_1}.$$

此极限  $E_{11}$  如果存在，则称其为甲商品的需求量  $Q_1$  对甲商品价格  $p_1$  的直接价格偏弹性；它表示当甲商品的价格  $p_1$  改变百分之一时，甲商品的需求量  $Q_1$  改变的百分数。同样可求出当甲商品的价格  $p_1$  不变，乙商品的价格  $p_2$  改变百分之一时，甲商品的需求量  $Q_1$  改变的百分数。

$$E_{12} = \lim_{\Delta p_2 \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta_{p_2} Q_1}{Q_1}}{\frac{\Delta p_2}{p_2}} = \lim_{\Delta p_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{p_2} Q_1}{\Delta p_2} \cdot \frac{p_2}{Q_1} = \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{Q_1}$$

此极限  $E_{12}$  如果存在，则称其为甲商品的需求量  $Q_1$  对乙商品价格  $p_2$  的交叉价格偏弹性。

现实生活中，许多商品的需求量除受自身价格变化的影响外，还受其他相关商品价格变化的影响，因此交叉价格偏弹性在描述两种或两种以上商品需求量之间的关系时是非常有用的工具。

由于  $\frac{\partial Q_1}{\partial p_2}$ 、 $\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}$  可正可负，因此  $E_{12}$ 、 $E_{21}$  可大于零，也可小于零。

如果  $E_{12} > 0$  或  $E_{21} > 0$ ，则  $\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} > 0$ 、 $\frac{\partial Q_2}{\partial p_1} > 0$ ，表明这两种商品是竞争的，可以相互取代的；

如果  $E_{12} < 0$  或  $E_{21} < 0$ ，则  $\frac{\partial Q_1}{\partial p_2} < 0$ 、 $\frac{\partial Q_2}{\partial p_1} < 0$ ，表明这两种商品是互补的，相互依赖的。

**例2** 若两种商品的需求函数分别为

$$Q_1 = 15 - 2p_1 - p_2, \quad Q_2 = 10 - p_1 - 2p_2,$$

求这两种商品的价格  $p_1 = 1, p_2 = 3$  时的偏弹性, 此时这两种商品是处于竞争还是互补的地位?

**解** 依题对两种商品的需求函数分别求偏导数得

$$\frac{\partial Q_1}{\partial p_1} = -2, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} = -1, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} = -1, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} = -2,$$

所以两种商品的需求量对价格的直接价格偏弹性分别为:

$$E_{11} = \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{Q_1} = (-2) \times \frac{1}{10} = -\frac{1}{5}, \quad E_{22} = \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{Q_2} = (-2) \times \frac{3}{3} = -2.$$

两种商品的需求量对价格的交叉价格偏弹性分别为：

$$E_{12} = \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{Q_1} = (-1) \times \frac{3}{10} = -\frac{3}{10},$$

$$E_{21} = \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{Q_2} = (-1) \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

因  $E_{12} < 0$ 、 $E_{21} < 0$ ，故这两种商品是互补的。