无穷小量与无穷大量课程思政案例

<table>
<tr><td>教学内容</td><td>2.1 函数的极限</td><td>教学时长</td><td>15 分钟</td><td>教学方式</td><td>线下课堂讲授</td></tr>
<tr><td>知 识 点</td><td colspan="2">无穷小量与无穷大量的定义</td><td>思政元素</td><td colspan="2">追求真理的科学精神</td></tr>
<tr><td>教学目标</td><td colspan="5">1.知识目标：
（1）了解无穷小量和无穷小量的定义；
（2）探究“无穷小量是否为 0”的问题。
2.思政育人目标：
（1）了解“科学是不断发展的开放体系”、“科学探索无止境”等思想，具备批判和怀疑精神；
（2）了解“以科学的态度对待科学，以真理的精神追求真理”等思想，具备追求真理的科学精神。</td></tr>
<tr><td colspan="6" align="center">教学策略与设计</td></tr>
<tr><td>教学设计</td><td colspan="4">教学内容</td><td>融入思政元素的策略</td></tr>
<tr><td>给出“无穷小量”的定义

引入“贝克莱悖论”</td><td colspan="4">无穷小　如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ (或 $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$) 时的极限为零，则称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ (或 $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$) 时的无穷小量.

对定义作如下说明：
（1）无穷小是变量,不能与很小的数混淆;
（2）零是可以作为无穷小的唯一的数.

无穷小量产生的背景：
十七世纪后期，艾萨克·牛顿（Isaac Newton)、戈特弗里德·威廉·莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz）在无穷小分析基础上创立微积分学，形成了无穷小演算——微积分这门学科
微积分学产生伊始，迎来的并非全是掌声，在当时它还遭到了许多人的强烈攻击和指责，最著名的为“贝克莱悖论”。

举例：在计算自由落体运动的瞬时速度时，
$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2 \\ &= \frac{1}{2}gt_0^2 + gt_0\Delta t + \frac{1}{2}gt\Delta t^2 - \frac{1}{2}gt_0^2 \\ &= gt_0\Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2\end{aligned}$$
计算 $\frac{\Delta S}{\Delta t}$: $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{gt_0\Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2}{\Delta t} = gt_0 + \frac{1}{2}g\Delta t$</td><td>以定义产生的背景引入</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>引入“函数极限探索的过程”，表现追求真理的科学精神</td>
<td>1734 年，大主教乔治·贝克莱(George Berkeley)对牛顿的无穷小理论进行了攻击，因为无穷小量在牛顿的理论中一会儿说是零，一会儿又说不是零。因此，贝克莱嘲笑无穷小量是“已死量的幽灵”。
提问：大家对“贝克莱悖论”如何认识的？
在微积分大范围应用的同时，关于微积分基础的问题也越来越严重。关键问题就是无穷小量究竟是不是零？无穷小及其分析是否合理？由此而引起了数学界甚至哲学界长达一个半世纪的争论，造成了十七、十八世纪的第二次数学危机。
直到 19 世纪 20 年代，数学家才关注于微积分的严格基础。从波尔查诺、阿贝尔、柯西、狄里赫利等人的工作开始，到威尔斯特拉斯、狄德金和康托的工作结束，中间经历了半个多世纪，基本上解决了矛盾，为数学分析奠定了一个严格的基础。
波尔查诺给出了连续性的定义；阿贝尔指出要严格限制滥用级数展开及求和；柯西在 1821 年的《代数分析教程》中从指出无穷小量和无穷大量都不是固定的量而是变量，无穷小量是以零为极限的变量；并定义了导数和积分；狄里赫利给出了函数的定义；威尔斯特拉斯给出现在通用的极限的定义（ε-δ语言），连续的定义，并把导数、积分严格地建立在极限的基础上。
无穷大　如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ (或 $x \to x_0^+$，$x \to x_0^-$，$x \to \infty$，$x \to +\infty$, $x \to -\infty$) 时的极限为无穷大，则称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ (或 $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$) 时的无穷大量.
记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$　(或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$).
对定义作如下说明：
（1）无穷大量不是一个很大很大的数，而是在自变量的变化过程中其绝对值无限增大的变量；
（2）无论多么大的数都不是无穷大量.
无穷小与无穷大的关系
定理　在自变量的同一变化过程中，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.
例如，$x \to 0$ 时，x^2 是无穷小量，$\dfrac{1}{x^2}$ 是无穷大量.</td>
<td>以提问的方式引起学生的思考</td>
</tr>
<tr>
<td>教学小结</td>
<td colspan="2">通过“贝克莱悖论”的引入，让学生了解函数极限形成的历程，使学生深刻的体会到科学家门追求真理的科学精神，以及培养他们的批判和怀疑精神，理解“我爱我的老师，但我更爱真理”的深刻内涵。</td>
</tr>
</table>

核心思政点	**1.辩证统一的哲学思维** 无穷小与无穷大相互依存、相互转化（无穷小的倒数是无穷大，无穷大的倒数是无穷小），体现对立统一规律，引导学生用全面、联系、发展的眼光看问题。 **2.量变积累到质变的思想** 无穷小是无限趋近于 0 的变化过程，不是静止的“0”；无数无穷小的累积可形成有限甚至无穷大，诠释量变引起质变，启示学习与成长重在持续积累。 **3.严谨求实的科学态度** 严格的极限定义强调精准、逻辑、可验证，反对模糊与直觉，培养求真务实、严谨规范的治学与工作作风。 **4.平凡与伟大的价值引领** 无穷小看似“微不足道”，却是微积分的基础；无数微小努力汇聚可成就大事，引导学生正视平凡、脚踏实地、久久为功。 **5.敬畏规律、理性看待得失** 无穷大不是“最大数”，无穷小不是“最小数”，都是客观变化趋势。教育学生理性看待高低、大小、得失，不盲目追求极端，尊重事物发展规律。 **6.化繁为简的科学方法** 利用等价无穷小替换简化极限运算，培养抓住本质、简化问题、高效解决的能力，提升创新思维与实践能力。