价格调整模型

例1 对于纯粹的市场经济来说，商品的价格取决于市场对此商品的供需关系. 如果商品供过于求，则其价格下跌；否则，如果商品供不应求，此价格称为均衡价格. 然而，在现实生活中，商品的市场价格往往不是正好处于均衡状态，价格的形成过程往往是一个通过市场不断自动调节并使市场价格逐步趋于均衡价格的过程. 因此价格是不断变化的，是关于时间t的函数.

若某商品在时刻t的价格为 $P(t)$ 社会对该商品的供给量和需求量都是关于P的函数，分别记为 $D(P), S(P)$又假定价格关于时间t的变化率与该商品在同时刻的超额需求量 $D(P)-S(P)$成正比，比例系数为k. 由此可以建立如下的微分方程

$$\frac{dP}{dt}=k[D(P)-S(P)]\ \ (k>0) \qquad (3)$$

在 $D(P)$和 $S(P)$确定情况下，可求出价格 $P(t)$与t的函数关系，这就是商品价格调整的微分方程模型.

一般情况下，商品供给量S是价格P单调递增函数，商品需求量D是价格P的单调递减函数，假设该商品的供给函数与需求函数分别为

$$S(P)=a+bP,\quad \mathrm{D(P)}=\alpha-\beta P, \tag{4}$$

其中a,b,α,β均为常数，且$b>0,\beta>0.$

当供给量与需求量相等，即$D(P)=S(P)$时，由(4)可得供求平衡时的价格$P_e=\dfrac{\alpha-a}{\beta+b}$，并称$P_e$为均衡价格.

将(4)式代入方程(3)中，可得

$$\frac{dP}{dt}=\lambda(\mathrm{P}_e-\mathrm{P}), \tag{5}$$

其中常数$\lambda=(b+\beta)k>0.$

解此一阶线性微分方程(5),得其通解为

$$P(t)=P_e+Ce^{-\lambda t}.$$

假设初始价格为 $P(0)=P_0$，代入上式得 $C=P_0-P_e$，于是满足初值条件 $P(0)=P_0$ 的微分方程(3)的特解为

$$P(t)=P_e+(P_0-P_e)e^{-\lambda t}.$$

由于 $\lambda>0$，因此有

$$\lim_{t\to+\infty}P(t)=\lim_{t\to+\infty}[P_e+(P_0-P_e)\mathrm{e}^{-\lambda t}]=P_e,$$

这说明，随着时间不断推延，实际价格 $P(t)$ 将逐渐趋近于均衡价格 P_e.

比如，当初始价格$P_0=1000$元，供给函数为 $S(P)=2P+1200$，

而需求函数为$D(P)=-P+3600$ 时，有

$$P_e=\frac{\alpha-a}{\beta+b}=\frac{3600-1200}{1+2}=800.$$

即某商品如果最初定价为1000元，随着时间不断延续，其实际价格将逐渐趋近于均衡价格800元.