主题名称	罗尔定理	**相关知识点**	导数、费马引例
所属课程	高等数学	**授课时长**	1 学时，45 分钟
授课对象	大一经济类专业	**教学资源**	多媒体
参考教材章节位置	《高等数学及其应用》第二版 第 4 章 中值定理与导数的应用 4.1 节 中值定理		

学情分析

罗尔定理是拉格朗日中值定理的一种特殊情形，柯西中值定理又是拉格朗日中值定理的一种推广。微分中值定理是教学的重点和难点。本课的教学对象是经济类专业大一年级。部分同学对数学有很好的兴趣，能积极探索问题本质及掌握证明技巧；但部分同学数学基础能力较弱，对抽象定理的理解不到位，缺乏对纯数学概念的学习兴趣。为克服学习上的难度，教师教学过程要遵循学生的思维活动顺序，从特殊到一般，从简到难。因此本节课详细讲解罗尔定理的相关内容，让学生掌握罗尔定理，为后续学习微分中值定理中的其它定理打下一个良好的基础。

教学目标

知识目标

熟练掌握罗尔定理的内容、证明、条件的讨论及罗尔定理的简单应用。

能力目标

培养学生主动探索证明的思路及方法，通过这个内容的教学展示数学发现与研究问题的基本方法，感知蕴藏在数学知识中的思想方法。

情感态度目标

使学生经历罗尔定理的完整的研究过程，体会到数学研究与数学应用的乐趣，发展应用意识和解决问题的能力。

教学重点

罗尔定理及其应用。

教学难点

罗尔定理的证明，利用构造的辅助函数证明有关的问题。

教学方法

以启发式讲授为主，发现法讲授法为辅，使学生体验发现真理的乐趣，学习解决问题的策略，提高发现问题、分析问题、解决问题的能力。通过定理引入、几何描述、举例分析、数形结合等教学手段，针对学生情况，避免过多的理论讲解，使学生能更好的理解罗尔定理的内涵。

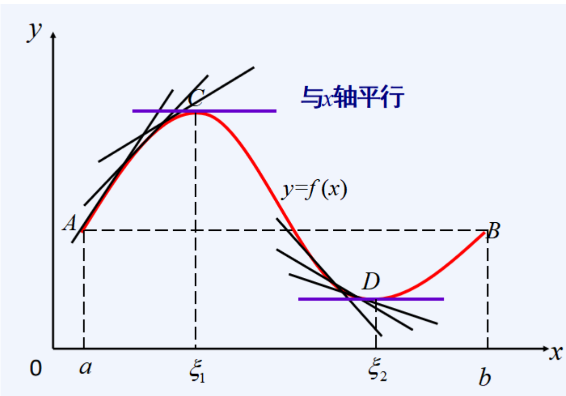
教学内容与过程

一、创设情境，兴趣导入（3 分钟）

【复习回顾】函数在某点 x_0 处的导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，几何上表示为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率，给出的是函数在 $(x_0,f(x_0))$ 处局部的性质，今天我们学习的罗尔定理是函数在有限区间内的整体的性质。

让学生观看 PPT 所演示的一个几何事实，提出问题：一条连续的曲线弧 AB，除端点外处处存在不垂直于 x 轴的切线，并且两端点高度相等。

【问题提出】弧 AB 在最高点和最低点处的切线具有什么特点呢？让学生通过观察得出结论。



设计意图：

通过提问的方式，激发学生的学习主动性，并结合 PPT 的动态演示，得出相应的结论，为引出本课程的相关内容做准备。

二、几何分析，归纳定理（6 分钟）

引导学生观察发现：闭区间 $[a,b]$ 上的一条光滑曲线 $f(x)$，如果满足两端点的

函数值相等，则在开区间 $[a,b]$ 内至少有存在一点 $(\xi, f(\xi))$，使得曲线在该点的切线水平，即 $f'(\xi)=0$.

【问题提出】一个函数如果在某个有限区间内同时满足上述三个条件，在开区间内 (a,b) 是否一定存在 ξ，使 $f'(\xi)=0$？

罗尔定理　如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，在开区间 (a,b) 可导，且 $f(a)=f(b)$，则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使$f'(\xi)=0$.

设计意图：

培养学生利用所学的知识——函数的连续性和可导性，对所观察到的几何直观进行数学描述。

罗尔定理的证明

证明：因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以有最大值和最小值，分别用 M 和 m 表示，现分为两种情况来讨论：

(1) 若 $m=M$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必为常数，从而结论显然成立。

(2) 若 $m<M$，则因 $f(a)=f(b)$，使得最大值 M 和最小值 m 至少有一个在 (a,b) 上的某点 ξ 处取得，从而 ξ 是 $f(x)$ 的极值点。

因为 $f(x)$ 在点 ξ 处可导，故由费马定理推知 $f'(\xi)=0$.

【用到的知识点】

(1) 常值函数的导数为 0；(2)最值在内部取得即为极值。

罗尔定理的几何意义

如果连续曲线弧 AB 上每一点都有不垂直于 x 轴的切线（端点除外），且两端点的纵坐标相等（即两点连线平行于 x 轴），则弧 AB 至少有一条切线平行于 x 轴。

设计意图：

定理的证明过程是教学的难点，通过不断抛出问题，解决问题，层层逼近，让学生充分参与进来，既充分调动了学生的自主学习，又培养了学生思考问题、解决问题的能力。

三、连续启发，层层推进（10 分钟）

【问题提出】罗尔定理的三个条件是否缺一不可？罗尔定理的三个条件是否可以弱化？即罗尔定理的三个条件中如果有一个不满足结论是否还一定成立？

讨论罗尔定理的三个条件的充分非必要性，深入理解罗尔定理。

一方面，通过举例说明，罗尔定理的条件不全满足时，结论可以成立。得出结论，罗尔中定理的条件是充分非必要的；

另一方面，通过三个实例说明罗尔定理的条件缺少任何一个，结论都有可能不成立。

例 1. $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x<1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$

例 2. $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$

例 3. $f(x)=x, x\in[0,1]$

例 4. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\in(0,\pi] \\ 1, & x=0 \end{cases}$

设计意图：

引导学生从以上四道例题中共同发现并说明定理中三个条件的重要性，如果条件不满足，结论不一定成立。

例　设$f(x)$在闭区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续，在开区间$(0,\frac{\pi}{2})$内可导，且$f(0)=0$，$f(\frac{\pi}{2})=1$，

试证明：方程 $f'(x)-\cos x=0$在$(0,\frac{\pi}{2})$内至少有一个实根.

【分析】本题用零点定理无法判定方程的解的存在性，根据方程的特征，方程是一个含有导数的方程，启发学生根据罗尔定理可以将问题转化为关于导函数零点存在问题，引导学生根据已有知识构造辅助函数$F(x)=f(x)-\sin x$，并验证$F(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$满足罗尔定理的条件，因此结论成立。

证明：令$F(x)=f(x)-\sin x$

则$F(x)$在闭区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续，在开区间$(0,\frac{\pi}{2})$内可导，且$F(0)=F(\frac{\pi}{2})$

所以 $\exists\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使$F'(\xi)=0$

即 方程$f'(x)-\cos x=0$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内至少有一个实根。

【总结】解释罗尔定理的应用：罗尔定理给出了一个判断导函数零点存在的准则。

设计意图：

结合具体的实例，让学生了解罗尔定理的基本应用。罗尔定理适用于讨论方程$f'(x)=0$根的存在性问题，利用微分中值定理解决问题时一个常用的方法就是构造辅助函数，但如何能够构造合适的辅助函数需要多看多练，分析和总结。

四、拓展深化，强化训练（23 分钟）

【课堂练习 1】如果函数$f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,且$f(a)=f(b)$,证明在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$,使得$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

【课堂练习 2】如果函数$f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,且$f(a)=f(b)$,证明在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$,使得$f(\xi)+f'(\xi)=0$.

设计意图：

巩固练习，构造辅助函数。

例 6. 设函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，证明方程$f'(x)=0$有且仅有 3 个实根，并指出它们所在的范围.

解 因为函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$是一个 4 次多项式，所以$f'(x)$是一个 3 次多项式，且方程$f'(x)=0$至多有 3 个实根。

又因为多项式函数在$(-\infty,+\infty)$上处处连续且可导，所以函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上处处连续且可导，又因为$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$，由罗尔定理知，方程$f'(x)=0$在区间(1,2),(2,3),(3,4)上分别有 1 个实根，因此方程$f'(x)=0$有且仅有 3 个实根，它们分别在区间(1,2),(2,3),(3,4)上。

设计意图：

启发学生从另外一个角度，利用罗尔定理讨论方程$f'(x)=0$根的问题。

五、小结概念，总结方法（3 分钟）

本节课学习了罗尔定理及其应用，要求学生重点掌握罗尔定理。本节课的难点是罗尔定理的证明，掌握利用构造辅助函数证明关于导数的方程的解的存在问题。

【课后作业】　课本 190 页 1,2,4

六、板书设计，条理清晰

1. 罗尔定理

2. 罗尔定理研究的是导数方程 $f'(x)=0$ 根的存在性问题。

教学总结

利用熟悉的知识为铺垫，引入新课程，既保持了知识的连贯性，又让学生对新课程有了整体的把握；在介绍罗尔中值定理之前，先是通过 PPT 的动态演示，让学生观察一个几何事实，引导学生通过对已有知识的运用，总结归纳出定理的条件及结论，既培养了学生的分析能力，又树立了学生的自信心。

本节课以启发式讲授为主，发现法讲授法为辅，使学生在教学的过程中体验发现真理的乐趣，学习解决问题的策略，提高发现问题、分析问题、解决问题的能力。