

讨论题 12：不规则平面图形面积的逼近

以下为你提供两个参考答案，一个侧重于古典的数值积分方法（黎曼和与梯形法），另一个侧重于现代的数据驱动方法（样条插值与离散点拟合），并附带了课堂引导建议。

参考答案一：黎曼和与梯形法则——从“割圆术”到数值积分

困惑描述：

你有一张湖泊的遥感图像，或者一片树叶的扫描图，想计算它的面积。你不能像求圆面积那样套用公式，也没有明确的函数表达式。如何用数学工具估算它的面积？

数学模型的解读：

1. 溯源：割圆术的启示

我们可以回顾一下中国古代的“割圆术”。刘徽用正多边形逼近圆，边数越多，多边形面积越接近圆面积。这其实就是极限思想的萌芽。

对于任意不规则图形，我们同样可以用简单的多边形去逼近它。比如在图形边界上取一系列点，连成一条折线，用折线围成的多边形面积近似代替原图形面积。

2. 直角坐标系下的矩形逼近

假设不规则图形可以被夹在两条曲线之间（即可以表示为 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 围成的区域，且 $f(x) \geq g(x)$ ）。虽然 f 和 g 可能没有解析表达式，但我们可以通过测量获得一些离散点上的函数值。

将区间 $[a, b]$ 划分为 n 个小区间，每个小区间宽度 Δx 。在每个小区间上，用矩形代替曲边梯形：

- **左矩形法：** 用左端点的函数值作为矩形的高。
- **右矩形法：** 用右端点的函数值作为矩形的高。
- **中点矩形法：** 用区间中点的函数值作为矩形的高。

面积近似为：

$$S \approx \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x$$

其中 x_i^* 是第 i 个小区间上的代表点。

3. 梯形法的改进

矩形法简单但误差较大。一个自然的改进是用梯形代替矩形：

$$S \approx \sum_{i=1}^{n-1} \frac{[f(x_i) - g(x_i)] + [f(x_{i+1}) - g(x_{i+1})]}{2} \cdot \Delta x$$

梯形法的误差阶是 $O((\Delta x)^2)$ ，比矩形法的 $O(\Delta x)$ 高一阶。这意味着当区间细分时，梯形法收敛得更快。

4. 更精确的辛普森法

如果进一步提高精度，可以用抛物线代替直线，这就是辛普森法。它用每三个点拟合一条抛物线，然后计算抛物线下的面积。误差阶可达 $O((\Delta x)^4)$ 。

5. 误差分析与取舍

在实际应用中，并不是方法越复杂越好。如果测量数据的精度本身不高（比如手描的树叶轮廓），用高精度方法可能意义不大，反而增加了计算量。这体现了数值分析

中的一个重要思想：**方法的精度要与数据的精度相匹配。**

课堂引导语：

“刘徽用正 3072 边形逼近圆，得到了圆周率的精确近似。今天我们面对更不规则的图形，思路其实一样——用简单图形去逼近复杂图形。从矩形到梯形到抛物线，每一步改进都在告诉我们：只要你愿意付出更多计算，就能获得更高精度。这就是数值逼近的核心。”

参考答案二：样条插值与离散点拟合——从“测量数据”到“光滑曲线”

困惑描述：

你手里没有连续的曲线方程，只有通过测量得到的一串离散点坐标（比如用 GPS 绕着湖泊走一圈，每隔一段距离记录一个点）。怎么用这些离散点估算湖泊面积？

数学模型的解读：

1. 问题的转化

我们有 n 个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，按顺序排列，围成一个封闭多边形。最直接的方法就是把这个多边形当作原图形的近似，用多边形面积公式计算。

2. 鞋带公式 (Shoelace Formula)

对于有序的顶点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ （首尾相连），多边形面积可以用以下公式计算：

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + (x_n y_1 - x_1 y_n) \right|$$

这个公式本质上是格林公式的离散形式。它把曲线积分转化为了离散点的求和。

3. 采样密度与逼近精度

用多边形逼近的精度取决于采样点的密度。如果湖泊边界弯弯曲曲，而采样点太稀疏，就会丢失大量细节，造成较大误差。

数学上，如果边界的曲率很大，就需要在曲率大的地方加密采样点。这引出了**自适应采样**的思想。

4. 样条插值：还原光滑边界

如果希望得到更精确的逼近，可以先对离散点进行**样条插值**，用光滑的样条曲线连接这些点，然后再对样条曲线围成的区域求面积。

样条插值保证了曲线通过所有测量点，并且在连接点处光滑（一阶甚至二阶导数连续）。这样得到的边界更接近真实情况。

5. 面积计算

得到样条曲线的参数方程 $x = x(t), y = y(t), t \in [0, T]$ 后，面积可以用格林公式的积分形式计算：

$$S = \frac{1}{2} \left| \oint (x dy - y dx) \right| = \frac{1}{2} \left| \int_0^T [x(t) y'(t) - y(t) x'(t)] dt \right|$$

这个积分可以用数值积分方法（如高斯求积）计算。

6. 现实应用

这种方法广泛应用于地理信息系统 (GIS)。用 GPS 采集湖泊边界点，软件会自动进行样条插值或直接用多边形近似，快速计算出面积。

课堂引导语：

“当你拿着 GPS 绕湖走一圈，你得到的只是一串离散的点。但这些点背后，藏着一个连续的

边界。数学给了你两种选择：要么直接用线段连起来（多边形近似），简单粗暴；要么用光滑的曲线穿过去（样条插值），更接近真实。无论哪种选择，最终都要回归到积分——要么是离散的鞋带公式，要么是连续的格林公式。这就是从数据到积分的桥梁。”

给老师的总结升华建议

在学生们讨论完这两个例子后，你可以帮他们梳理出面积逼近问题中的**核心数学思想**，以及不同方法的适用场景：

方法	数学工具	优点	缺点	适用场景
矩形法/梯形法	黎曼和、数值积分	简单直观、计算量小	需要知道边界上的函数值	边界可表示为函数、有采样点
辛普森法	抛物线插值、数值积分	精度高、收敛快	需要等距采样点	函数光滑、采样点规则
多边形逼近	鞋带公式、格林公式	直接使用离散点、计算简单	精度受采样密度限制	GPS 测量、离散点数据
样条插值+积分	样条函数、参数积分	边界光滑、精度高	实现复杂、计算量大	高精度要求、边界弯曲

可拓展的课堂提问：

- 如果边界是分形（如海岸线），随着测量尺度变细，测得的面积会怎样变化？（引出分形维数与 coastline paradox）
- 如何用蒙特卡洛方法验证梯形法的计算结果？（引出不同方法的相互验证）
- 在实际测量中，采样点应该均匀分布，还是在曲率大的地方加密？为什么？
- 如果测量点有噪声（GPS 误差），直接用多边形逼近和先用平滑滤波再逼近，哪种更好？