第 6.3 节　定积分在经济管理中的应用

定积分在经济管理中的应用非常广泛,本节介绍两个最常见的应用.

1. 求改变量问题

微积分第二基本定理说明,如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,那么

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

由导数的定义我们知道 $f(x)$ 是 $F(x)$ 关于 x 的变化率,而 $F(b)-F(a)$ 是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上的改变量,所以上述公式又可表示为:

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

因此在经济学中由边际函数求总量的改变量问题,比如由边际需求求总需求在价格变动时的改变量问题,由边际收益求总收益在价格变动时的改变量问题等都可以用上述公式解决.

例 6.3.1　某种商品的需求量 Q 是价格 P 的函数,该商品的最大需求量为 2 000,且需求量关于价格的变化率(即边际需求)为

$$Q'(P)=-2\,000\ln 5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^P.$$

(1) 求出需求量 Q 关于价格 P 的函数关系;

(2) 当价格从 $P=1$ 上涨到 $P=2$ 时,需求量减小了多少?

解　(1) 由于需求量 $Q(P)$ 是 $Q'(P)$ 的原函数,所以 $Q(P)-Q(0)$ 等于 $Q'(P)$ 从 0 到 P 的定积分,即

$$\begin{aligned}Q(P)&=Q(0)+\int_0^P\left[-2\,000\ln 5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^t\right]\mathrm{d}t=2\,000+2\,000\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^t\Bigg|_0^P\\&=2\,000\left(\frac{1}{5}\right)^P.\end{aligned}$$

因此需求量 Q 关于价格 P 的函数关系为

$$Q(P)=2\,000\left(\frac{1}{5}\right)^P.$$

(2) **方法 1**　当价格从 $P=1$ 上涨到 $P=2$ 时,需求量减少的数量为

$$Q(1)-Q(2)=2\,000\left(\frac{1}{5}\right)-2\,000\left(\frac{1}{5}\right)^2=320.$$

方法 2　用定积分计算,需求量变化的数量为

$$\int_1^2\left[-2\,000\ln 5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^t\right]\mathrm{d}t=2\,000\cdot 5^{-t}\Big|_1^2=-320.$$

即当价格从 1 涨到 2 时,需求量减少 320.

例 6.3.2　设某产品的边际成本为 $C'(x)=4+\dfrac{x}{4}$ (万元/百台),边际收人 $R'(x)=$

$8-x$(万元/百台),求:

(1) 产量由1百台增到5百台的总成本与总收入的增量;

(2) 产量为多少时,总利润最大?

(3) 已知不变成本 $C(0)=1$(万元),求出总成本、总利润与产量 x 的函数关系式;

(4) 求利润最大时的总成本与总收入(不变成本 $C(0)=1$(万元)).

解 (1) 产量由1百台增到5百台的总成本的增量为

$$\int_1^5 C'(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^5\left(4+\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x=\left(4x+\frac{x^2}{8}\right)\Bigg|_1^5=16+3=19(\text{万元}).$$

产量由1百台增到5百台的总收入的增量为

$$\int_1^5 R'(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^5(8-x)\,\mathrm{d}x=\left(8x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^5=32-12=20(\text{万元}).$$

(2) 总利润 $L(x)=R(x)-C(x)$,由 $L'(x)=0$,得 $R'(x)=C'(x)$,即

$$8-x=4+\frac{x}{4},$$

得 $x=3.2$(百台),且它是总利润 $L(x)$ 的唯一驻点,因此由实际意义知,当 $x=3.2$(百台)时,总利润达到最大.

(3) $C(x)=\int_0^x C'(t)\,\mathrm{d}t+C(0)=\int_0^x\left(4+\frac{t}{4}\right)\mathrm{d}t+1=4x+\frac{x^2}{8}+1$,

$$\begin{aligned}L(x)&=\int_0^x R'(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x C'(t)\,\mathrm{d}t-C(0)=8x-\frac{1}{2}x^2-4x-\frac{x^2}{8}-1\\&=-\frac{5}{8}x^2+4x-1,\end{aligned}$$

(4) 利润最大时的总成本为

$$C(3.2)=4\cdot 3.2+\frac{1}{8}\cdot(3.2)^2+1=15.08(\text{万元}),$$

因为 $L(3.2)=5.4$(万元),所以利润最大时的总收入为

$$R(3.2)=5.4+15.08=20.48(\text{万元}).$$

2. 社会收入分配问题

洛伦兹(Lorenz)曲线是衡量某一社会收入分配平均程度(即衡量是否存在贫富差距)的常用工具,它是以人口累积百分比 P 作为横轴坐标,以收入累积百分比 I 作为纵轴坐标,得到的曲线 L(图6.3.1),其方程记为 $I=L(P)$.

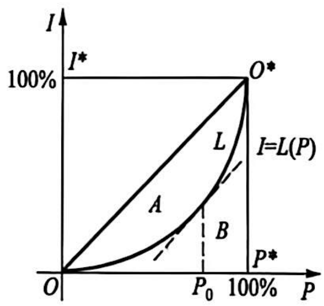

图 6.3.1

曲线 L 上点 (P,I) 表示,总人口中 $100P\%$ 的收入最低人口占有全社会收入的 $100I\%$,如点(0.30,0.15)若是曲线 L 上的一点,则表明总人口中30%的收入最低人口只占有全社会收入的15%.

如果某一社会的洛伦兹曲线 L 为直线 OO^*,那么 $P=I$,它表示收入最低的人口拥有的收入占全社会总收入的比例与他们占总人口的比例相同,这时社会的收入分配是绝对平均的. 称直线 OO^* 为**绝对平均线**.

如果某一社会的洛伦兹曲线 L 为折线 $OP^{*}O^{*}$，这时社会的收入分配是绝对不平均的. 称折线 $OP^{*}O^{*}$ 为**绝对不平均线**.

显然洛伦兹曲线 L 越接近绝对平均线 OO^{*}，社会收入分配越平均，收入差距越小；洛伦兹曲线 L 越接近绝对不平均线 $OP^{*}O^{*}$，社会收入分配越不平均，收入差距越大.

如果在 $P=P_0$ 处 $L'(P_0)=1$，那么洛伦兹曲线 L 在点 $(P_0, L(P_0))$ 处的切线与绝对平均线 OO^{*} 平行，这表明约有 $100P_0\%$ 的人其收入处于社会平均水平以下.

用洛伦兹曲线可以衡量社会是否存在收入差距，但无法衡量收入差距的大小，所以希望能有一个反映社会收入差距大小的量化指标，基尼系数就是一个反映社会收入差距大小常用的指标.

设 A 表示洛伦兹曲线 L 与绝对平均线 OO^{*} 围成的平面图形的面积，B 表示洛伦兹曲线 L 与绝对不平均线 $OP^{*}O^{*}$ 围成的平面图形的面积，称

$$G=\frac{A}{A+B}$$

为**基尼系数**. 其含义是在全部人口收入中，用于进行不平均分配的那部分收入所占的比例. 若 $A=0$，则基尼系数 $G=0$，社会收入分配绝对平均；若 $B=0$，则基尼系数 $G=1$，社会收入分配绝对不平均. 一般地，若 $A>0, B>0$，则

$$G=\frac{A}{A+B}=2A.$$

联合国有关组织规定，基尼系数低于 0.2 时，可认为收入绝对平均；介于 0.2 和 0.3 之间时，可认为收入比较平均；介于 0.3 和 0.4 之间时，可认为收入相对合理；介于 0.4 和 0.5 之间时，可认为收入差距较大；高于 0.5 时，可认为收入差距悬殊.

国际上通常将 0.4 作为贫富差距的“警戒线”.

例 6.3.3　设洛伦兹曲线方程为 $I=L(P)=P^4$，

(1) 求基尼系数；

(2) 讨论有多少人的收入在社会平均收入之下；

(3) 讨论收入最高的 20% 人口拥有社会总收入的情况.

解　(1) 由于 $B=\int_0^1 P^4\mathrm{d}P=\frac{1}{5}$，所以由基尼系数的定义，可得

$$G=\frac{A}{A+B}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=0.6,$$

说明社会贫富差距较大.

(2) 由于 $L'(P)=4P^3$，令 $L'(P)=4P^3=1$，求得

$$P_0=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\approx 0.63,$$

所以约有 63% 的人收入在社会平均收入之下.

(3) 收入最高的 20% 人口对应的是横轴上 80% ~100% 的人，所以他们的收入为

$$L(1)-L(0.8)\approx 0.59.$$

即收入最高的 20% 人口拥有的收入约占社会总收入的 59%.

习题 6.3(A)

1. 已知生产 x 个单位的某种产品,单位成本的导数 $\left(\frac{C(x)}{x}\right)'=-\frac{100}{x^2}$,产量为 1 个单位时,成本为 102,又知边际收入为 $R'(x)=12-0.1x$,求:

(1) 利润函数;

(2) 利润最大时的产量;

(3) 利润最大时的平均价格.

2. 设洛伦兹曲线方程为 $L(P)=P^{\frac{5}{3}}$,

(1) 求基尼系数;

(2) 讨论有多少人的收入在社会平均收入之下;

(3) 讨论收入最高的 10% 人口拥有社会总收入的情况.

习题 6.3(B)

1. 一家新开张的大型连锁超市,举办一周的庆典活动,活动期间共接待顾客 5 万人. 超市负责人估计以后每周约有 2 000 名新顾客光顾超市. 据对超市客流量的研究表明,在 n 个第一次来超市的新顾客中,第 $t+1$ 周内将有 $nf(t)$ 个顾客来超市购物,这里 $f(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}$. 试估计开业后第 21 周超市的客流量.

2. 设某商品从时刻 0 到时刻 t 的销售量 $x(t)=kt, t\in[0,T], k>0$,欲在 T 时将数量为 A 的该商品销售完,试求:

(1) t 时的商品剩余量,并确定常数 k;

(2) 在时间段 $[0,T]$ 上的平均剩余量.

第 6.4 节 定积分在概率中的应用

概率论中研究的随机变量主要有两类:一类是离散型随机变量,另一类是连续型随机变量. 在研究连续型随机变量时定积分起着重要的作用.

所谓连续型随机变量,是指其取值充满某个区间的随机变量. 比如,某种灯泡的使用寿命,某类人群的身高等都是连续型随机变量. 下面给出定积分在概率论中计算随机事件发生的概率和随机变量的平均值时的应用.

定义 6.4.1 对于随机变量 X,若存在非负可积函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$,使对任意实数 $a,b(a<b)$,均有随机变量 X 落入区间 $(a,b]$ 的概率(即随机事件 $(a<X\leqslant b)$ 发生的概率)

$$P(a<X\leqslant b)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

则称 X 为**连续型随机变量**,称 $f(x)$ 为 X 的**概率密度**.

根据概率的性质可以证明,连续型随机变量在某一区间内的概率与区间端点无