第一章　二重积分及其应用竞赛例题

§1.1　二重积分的相关题及变量的对称性问题

1. 设闭区域 D: $x^2+y^2\leqslant y, x\geqslant 0$. $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数, 且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint\limits_D f(u,v)dudv,$$

求 $f(x,y)$.

2. (1)(书上P390 第五题类似)设 $\phi(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的正值连续函数, a 与 b 为任意常数, 区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x,y\leqslant 1\}$, 则 $\iint_D \frac{a\phi(x)+b\phi(y)}{\phi(x)+\phi(y)}dxdy=(\quad)$

$$A.\ a;\qquad B.\ b;\qquad C.\ a+b;\qquad D.\ \frac{1}{2}(a+b).$$

(2) 设 D: $x^2+y^2\leqslant 1$, $f(x,y)$ 在 D 上连续.
求证:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(y,x)dxdy;$$

试求

$$\iint\limits_D(\sin^2 x+\cos^2 y)dxdy.$$

(3) 计算

$$I=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{2-x}e^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x}e^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)dy.$$

§1.2　与二重积分有关的极限问题

3. 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i^2\sin\frac{j\pi}{2n}.$$

4. (1)计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2n}\frac{2}{n^2}[\frac{2i+j}{n}],$$

这里 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数.

(2)求 $\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^6}\int_0^t dx\int_x^t \sin(xy)^2dy$.

5. 设函数 $f(x)$ 可微, 且 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, 又设平面区域 D: $x^2+y^2\leqslant t^2$, 求

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^3}\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})d\sigma.$$

6. 设函数 $f(x,y)$ 在单位圆域上有连续的偏导数, 且在边界上的值恒为零. 证明:

$$f(0,0)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint\limits_D\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy,$$

其中: D 为圆域 $\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$.

§1.3 交换积分次序–仅是二重积分计算的一部分

说明: 被积函数 $f(x,y)$ 中含 $e^{\pm x^2}$, $\sin x^2$, $\cos x^2$, $e^{\pm\frac{1}{x}}$, $\sin\frac{1}{x}$, $\cos\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$ 的二重积分, 一般先对 y 积分, 后对 x 积分; 对含变量 y 的类似函数的情形则先对 x 积分, 后对 y 积分.

7. 计算

$$I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx.$$

8. 计算 $\int_0^1 tdt\int_t^1 e^{\left(\frac{t}{x}\right)^2}dx$.

9. (1) 设函数 $f(x,y)$ 连续, 且 $\int_{-1}^0 dx\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy=\int_a^b\int_c^d f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$, 则 a, $b\,c$, d 取值为 ( )

$A.\ a=\frac{\pi}{2},b=\pi,c=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta},d=1;$ $B.\ a=\frac{\pi}{2},b=\pi,c=\frac{1}{\sin\theta-\cos\theta},d=1;$

$C.\ a=0,b=\frac{\pi}{2},c=\sin\theta+\cos\theta,d=1;$ $D.\ a=0,b=\frac{\pi}{2},c=\sin\theta-\cos\theta,d=1.$

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \sqrt{2x-x^2}, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 交换二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^{1+\sqrt{1-y^2}}f(y)dx$ 的次序, 并求积分的值.

10. 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 可以写成 ( )

$A.\ \int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx;$ $B.\ \int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx;$

$C.\ \int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy;$ $D.\ \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dx.$

11. (1) 将二重积分

$$I=\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy$$

变换积分次序.

(2)计算

$$I=\int_0^{a\sin\phi}e^{-y^2}dy\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{b^2-y^2}}e^{-x^2}dx+\int_{a\sin\phi}^{b\sin\phi}e^{-y^2}dy\int_{y\cot\phi}^{\sqrt{b^2-y^2}}e^{-x^2}dx,$$

其中 $0<a<b$, $0<\phi<\frac{\pi}{2}$, 且 a, b, ϕ 均为常数.

12. 计算下列积分:

(1) $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$, 其中 a, b 为常数且 $0<a<b$;

(2) $\iint_D e^{-y^2}dxdy$, 其中 D 为直线 $y=x$ 与曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 围成的有界闭区域.

§1.4 被积函数的奇偶性与积分区域的对称性

13. (1) 设 D 是 xoy 平面上以点 $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限部分, 则$\iint_D(xy+\cos x\sin y)dxdy=$ ( )

$A.\ 2\iint_{D_1}xydxdy;$ $B.\ 2\iint_{D_1}\cos x\sin ydxdy;$

$C.\ 4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy;$ $D.\ 0.$

(2)设 D 为由折线 $|x|+|y|=1$ 所围成的区域, D_1, D_2, D_4 为 D 在第 1, 2, 4象限部分, 则$\iint_D e^{-(x^2+y)}dxdy=(\quad)$

$$A.\ 4\iint_{D_1} e^{-(x^2+y)}dxdy; \qquad B.\ 4\iint_{D_4} e^{-(x^2+y)}dxdy;$$

$$C.\ 2\iint_{D_1+D_2} e^{-(x^2+y)}dxdy; \qquad D.\ 2\iint_{D_1+D_4} e^{-(x^2+y)}dxdy.$$

(3) 试求二次积分

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{x}^{2-|x|}\left(e^{|y|}+\sin(x^3y^3)\right)dy.$$

§1.5 分段函数的积分

14. (1) 计算

$$I=\iint\limits_D |sin(x+y)|dxdy,$$

其中区域 D 为: $0\leqslant x\leqslant \pi$, $0\leqslant y\leqslant 2\pi$.

(2) 设函数$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 2, \\ 0, & other, \end{cases}$ 试求二重积分

$$\iint\limits_D \frac{f(x+y)}{f(\sqrt{x^2+y^2})}dxdy, \qquad \text{其中 } D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}.$$

15. (1)计算

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}|x+y-x^2-y^2|dxdy.$$

(2)已知 $D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2=1\}$, 计算二重积分

$$\iint\limits_D |\sqrt{x^2+y^2}-1|dxdy.$$

16. (1)考过两次: 设 $f(x,y)=\max_D\{x,y\}$, $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$, 计算

$$I=\iint\limits_D f(x,y)|y-x^2|dxdy.$$

(2)求

$$\iint\limits_D (x+y)sgn(x-y)dxdy,$$

其中 $D=[0,1]\times[0,1]$.

17. 假设函数 $f(x,y)$ 满足: 当 $x^2+y^2\geqslant 1$ 且 $x>0$ 时有 $f(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$; 否则 $f(x,y)=0$. 求

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2y\}$.

§1.6 二重积分的证明题

18. 设正值函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, $\int_a^b f(x)dx = A$, 证明:

$$\int_a^b f(x)e^{f(x)}dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geqslant (b-a)(b-a+A).$$

19. 设区域 $D = \{(x,y)|0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$, 函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续且 $\iint_D f(x,y)dxdy = 0$, $\iint_D xyf(x,y)dxdy = 1$, 证明: 存在 $(\xi,\eta) \in D$, 使得

$$|f(\xi,\eta)| \iint\limits_D |xy-1|dxdy \geqslant 1.$$

§1.7 二重积分的计算

20. 试计算二重积分

$$\iint\limits_D \left(x^2+xy\right)^2 dxdy,$$

其中 D 为 $\{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 2x\}$.

21. 计算

$$\iint\limits_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}dxdy,$$

其中区域 D 为直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围成的三角形区域.

22. 计算

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}dxdy,$$

其中 $0 \leqslant \rho < 1$.

23. 计算

$$\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy,$$

其中 D 是 $x^2+y^2=1$ 且 $x \geqslant 0$ 所围成的部分.

24. 求

$$\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy,$$

其中 D 是 $x^2+y^2=2x$ 内且 $x \geqslant 1$ 的部分.

25. 已知 $D = \{(x,y) \mid (x-1)^2+y^2=1\}$, 计算二重积分

$$\iint\limits_D |\sqrt{x^2+y^2}-1|dxdy.$$

26. 计算二重积分

$$\iint\limits_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}dxdy,$$

其中区域 D 为 $y=x+2$ 与 $y=\sqrt{4-x^2}$ 以及 x 轴所围成的区域.

27. 设 $f(x)$ 连续可导, $a>0$, 求

$$\int_0^a dx \int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy.$$

§1.8 答案

1.

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{4}{3\pi}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3});$$

2. (1) D; (2) π; (3) $\frac{e^4-e}{2}$; 3. $\frac{1}{3}$; 4.(1)6;(2)1/18; 5. $2\pi/3$; 7. $\frac{3}{8}e-\frac{1}{2}\sqrt{e}$; 8. $\frac{e-1}{6}$; 9. (1) B; (2) 1; 10. D;

11. (1)

$$I=\int_0^1 dx\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dy;$$

(2) $\frac{e^{-a^2}-e^{-b^2}}{2}\phi$; 12. (1) $\ln\frac{1+b}{1+a}$; (2) $1/e$; 13. (1)B; (2)D; (3) $2(e^2-e-1)$; 14. (1) 4π; (2) $4(\sqrt{2}-1)+2\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$; 15. (1)$\frac{9\pi}{4}$; (2)$3\sqrt{3}-\frac{\pi}{9}-\frac{32}{9}$; 16. (1)$\frac{11}{40}$; (2) 0; 17. $\frac{\pi^2}{18}+\frac{\sqrt{3}}{24}\pi+\frac{3}{8}$; 20. $35\pi/12$; 21. $\frac{16}{15}$; 22. $2\pi\sqrt{1-\rho^2}$; 23. $\frac{\pi}{2}\ln 2$; 24. $\frac{\pi}{8}$; 25. $3\sqrt{3}-\frac{\pi}{9}-\frac{32}{9}$; 26. $2\pi-2$; 27 $\pi(f(a)-f(0))$.