主题名称	旋转体的体积	相关知识点	定积分、微元法
所属课程	高等数学	授课时长	1 学时，45 分钟
授课对象	大一国财务类专业	教学资源	多媒体
参考教材 章节位置	《高等数学及其应用》第二版 第 6 章 定积分的应用 6.2 节 定积分在几何中的应用		

学情分析

本节课所讲授的“旋转体的体积计算”是定积分在实际问题中的一个重要应用，其求解思路中充分的体现了微元法“化整为零”的思想，对于微积分的学习和理解具有重要的理论价值和实际意义。

旋转体的体积是定积分应用中的一个重要知识点，它对巩固元素法的理解和运用起到了重要的作用。该内容的学习过程渗透了抽象思维，对学生的空间想象能力、数形结合能力、类比规划能力提出了较高的要求，对培养学生由量变到质变的哲学思想有比较形象的数学描述。

学生已有定积分计算的基础，上节课学习了定积分的元素法并能较熟练使用该方法计算不规则平面图形的面积，所以本节课继续使用微元法求体积元素时，结合动态 PPT 的演示，使学生直观易懂，明白旋转体体积的形成过程，找到构成体积的体积元素。引导同学们一步步思考问题，提高解决问题的能力。另外由于学生数学基础参差不齐，空间想象能力欠佳，在理解这部分内容时存在一定的困难，需借助多媒体教学手段，帮助学生化抽象为直观，提高学习兴趣和学习效果。

教学目标

知识目标

掌握用定积分的微元法求一个平面图形绕 x 轴或 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

能力目标

在教学过程中让学生进一步深刻领会从近似中认识精确、从有限中认识无限的微积分基本思想。不管绕哪个轴旋转，要抓住本质：微元法思想。明确微元选取方向和旋转轴的关系，通过确定积分微元和积分区间，即可得旋转体体积。

情感态度目标

通过对用定积分的微元法求旋转体的体积，使学生认识到数学在生产实践、科学技术中的广泛应用，激发学生热爱数学的热情。体会学以致用的成就感，体会数学中无处不在的理念。

教学重点

“微元法”思想求旋转体的体积。

教学难点

理解用定积分的微元法求旋转体体积的思想方法。

教学方法

采取启发、讲授、动态演示及举例等方法穿插进行，更能吸引学生注意力，从而使学生较容易使用元素法找到对应图形的体积元素，推导出旋转体的体积公式并加以正确运用，使学生真正地感受到数学在解决实际问题中的应用。

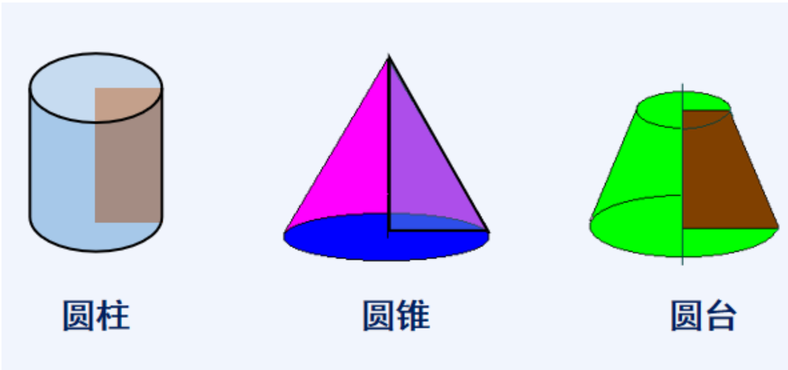
教学内容与过程

一、创设情境，兴趣导入（3 分钟）

1. 生活中的立体图形是如何形成的？

多媒体课件展示在日常生活和工程技术中，我们经常见到各种各样的旋转体，如冷却水塔、陀螺、青花瓷瓶、漏斗等。接着用动画展示高中阶段学过的一些简单的旋转体如圆柱、圆锥、圆台。

【问题提出】这些规则的立体图形是如何形成的？



由此给出一般的旋转体的概念，并用动画展示一般旋转体的形成过程。

2. 什么是旋转体？

旋转体就是由一个平面图形绕这个平面内的一条直线旋转一周而成的立体．这直线称为**旋转轴**。

【问题提出】旋转体的体积又该如何计算呢？

设计意图：

创设贴近生活的问题情境，展示旋转体的现实特例，演示旋转体的动态线面关系，引导学生从形和态的观察中思考旋转体。在此基础上引出新课，求旋转体的体积。

二、复习回顾，运用思想（2 分钟）

复习用定积分的微元法求曲边梯形面积的三步曲“定区间，求微元，求积分”。帮助学生理解“化整为零，近似替代”和“积零为整，无限累加”的微积分的基本思想，为用定积分的微元法求旋转体的体积打下铺垫。微元法的步骤：

（1）　定区间，例如 x 为积分变量，确定它的变化区间$[a,b]$；

（2）　求微元，把区间$[a,b]$分成 n 个小区间，取其中任一小区间记为$[x, x+dx]$，求部分量的近似值，得到微元 $dV = S(x)dx$；

（3）　定积分，求精确体积$V=\int_a^b S(x)dx$。

设计意图：

启发同学们思考利用微元法观察新问题，发现新问题，解决新问题的积极性。

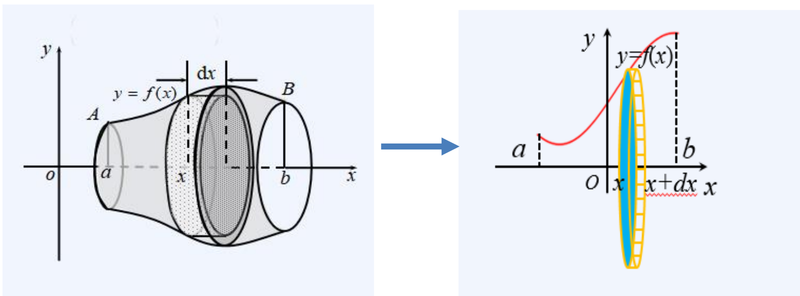
三、数形结合，类比探究（13 分钟）

【问题提出】如何用定积分微元法求旋转体的体积呢？

类比用定积分的微元法求曲边梯形面积的方法，并结合动画或三维立体图形的直观演示，计算旋转体的体积。

（一）绕 x 轴旋转

由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 以及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积。



按照“化整为零，近似替代”的方法，以圆柱体体积近似替代不规则的旋转体，再利用“积零为整，无限累加”的方法，求出整个旋转体的体积。方法如下：

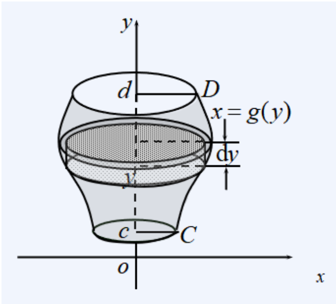
1. 定区间：$x\in[a,b]$

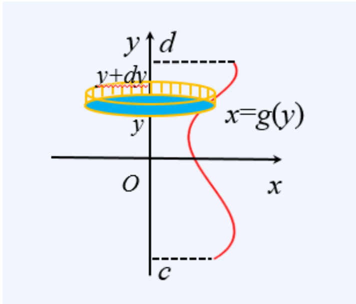
2. 求微元：$dV=S(x)dx=\pi f^2(x)dx$

3. 求积分：$V_x=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b \pi f^2(x)dx$

（二）绕 y 轴旋转

由曲线 $x=g(y)$，直线 $y=c$，$y=d$ 以及 y 轴围成的图形绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积。





按照“化整为零，近似替代”的方法，以圆柱体体积近似替代不规则的旋转体，再利用“积零为整，无限累加”的方法，求出整个旋转体的体积。方法如下：

1. 定区间：$y \in [c,d]$

2. 求微元：$dV = S(y)dy = \pi g^2(y)dy$

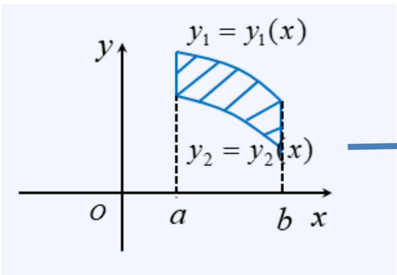
3. 求积分：$V_y = \int_c^d S(y)dy = \int_c^d \pi g^2(y)dy$

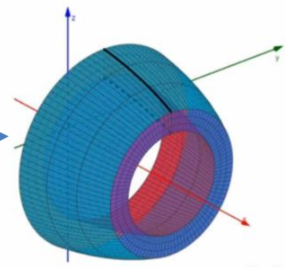
设计意图：

类比用定积分的微元法和动画的直观演示，激发学生兴趣与思考。

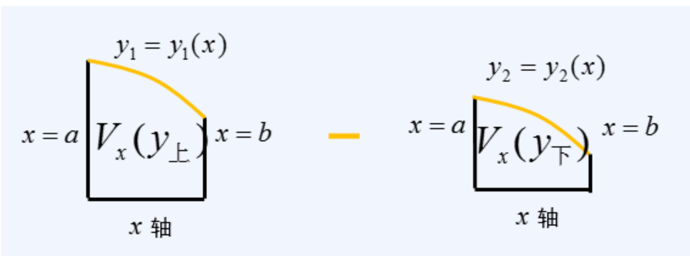
【推广（一）】

由曲线 $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x)$, 直线 $x = a,\ x = b$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积。





【分析】通过前两种曲边梯形旋转获得旋转体体积的学习，我们可以将平面中含有两条曲线的图形进行分解，利用外层曲边梯形的面积旋转的体积**减**内层曲边梯形的面积旋转的体积，得到所求的旋转体体积。



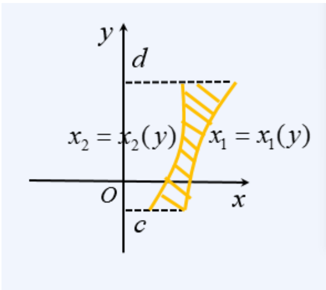
1. 定区间：$x \in [a,b]$

2. 求微元：$dV = S(y_{上})dx - S(y_{下})dx = \pi y_1^2(x)dx - \pi y_2^2(x)dx$

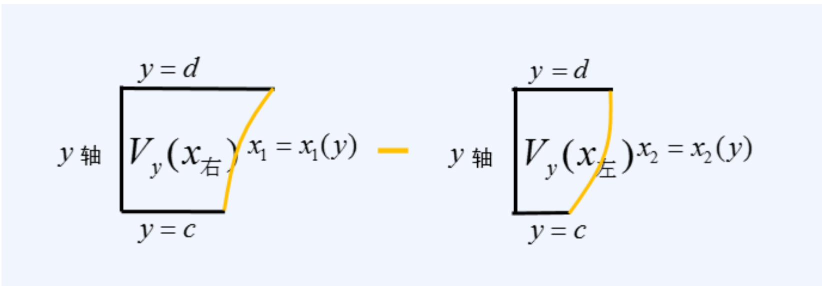
3. 求积分：$V_x = V_x(y_{上}) - V_x(y_{下}) = \int_a^b \pi(y_1^2(x) - y_2^2(x))dx$

【推广（二）】

由曲线 $x_1 = x_1(y),\ x_2 = x_2(y)$, 直线 $y = c,\ y = d$ 所围成的图形绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积。



【分析】通过前两种曲边梯形旋转获得旋转体体积的学习，我们可以将平面中含有两条曲线的图形进行分解，利用外层曲边梯形的面积旋转的体积**减**内层曲边梯形的面积旋转的体积，得到所求的旋转体体积。



1. 定区间：$y \in [c,d]$

2. 求微元：$dV = S(x_{右})dx - S(x_{左})dx = \pi x_1^2(y)dx - \pi x_2^2(y)dy$

3. 求积分：$V_y = V_y(x_{右}) - V_y(x_{左}) = \int_c^d \pi(x_1^2(y) - x_2^2(y))dy$

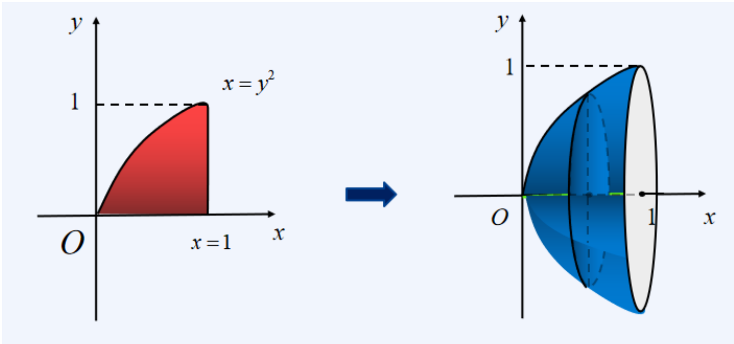
设计意图：

通过立体图形，同学们能明确的了解旋转后的图形，对空间立体感受更加有序，有利于培养观察问题，解决问题的能力。

四、 拓展深化，强化训练（24 分钟）

例 1. 计算由抛物线弧 $x = y^2, y \in [0,1]$ 与 x 轴，直线 $x = 1$ 围成的图形绕 x 轴旋转一周

所成旋转体的体积。

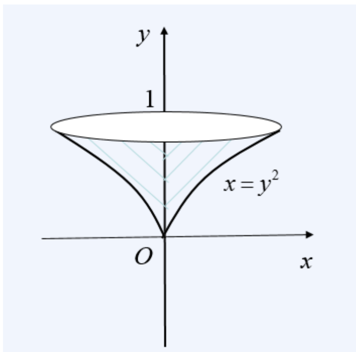


解：绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为

$$V_x=\int_0^{\pi}\pi(\sqrt{x})^2dx=\frac{\pi}{2}$$

【小结】只要把握微元法的思想，恰当选择积分变量，构造被积函数，这类问题将迎刃而解。

例 2.　计算由抛物线弧 $x=y^2,y\in[0,1]$ 与 y 轴，直线 $y=1$ 围成的图形绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积。



解：绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积为

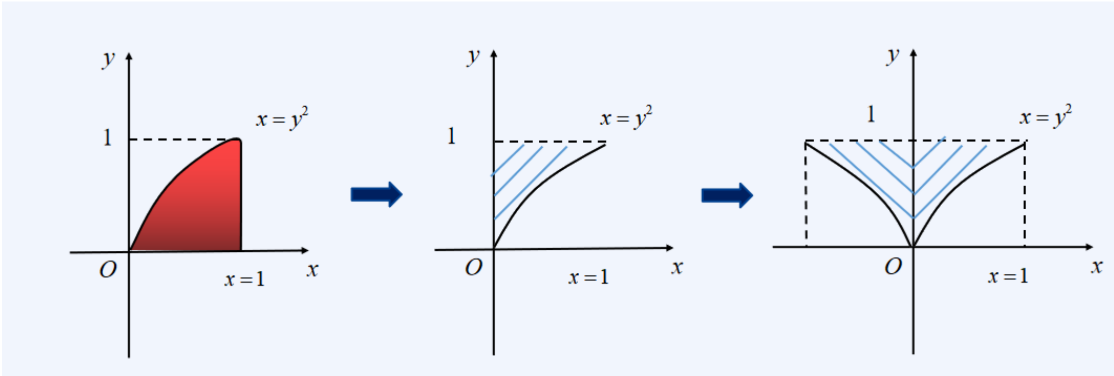
$$V_y=\int_0^1\pi g^2(y)dy=\int_0^1\pi y^4dy=\frac{\pi x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}$$

【问题提出】如果例 1 中的平面图形绕 y 轴旋转，体积又该如何计算呢？与例 2 有什么关联呢？

例 3.　计算由抛物线弧 $x=y^2,y\in[0,1]$ 与 x 轴，直线 $x=1$ 围成的图形绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积。

【分析】直观上来看，该旋转体就像一个水桶被从中间挖掉一个芯。V_x 和 V_y 的公式，应选择哪个呢？根据之前的分析，当转轴为 y 轴时，意味着分别由 dy 和 x=$g(y)$决定。

由于水桶被挖掉了一个芯，可用整个水桶的体积减去挖掉部分来求解，也就是利用推广（二）中的结论。



解： $V_y = V_y(x_{右}) - V_y(x_{左})$

$$= \int_0^1 \pi(1^2 - (y^2)^2)dy = \int_0^1 \pi(1 - y^4)dy = \pi(y - \frac{1}{5}y^5)|_0^1 = \frac{4}{5}\pi$$

设计意图：

通过三道例题的求解，明确相同曲线，分别绕 x 轴和 y 轴旋转时，积分微元建立的区别与联系，掌握方法的核心思想。

例 4. 计算由正弦曲线弧 $y=\sin x, x\in[0,\pi]$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积。

解： 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为

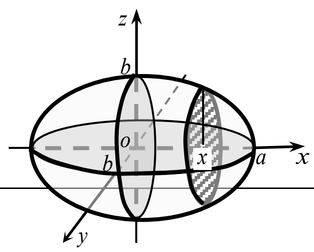
$$V_x = \int_0^{\pi} \pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}[x - \frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

【思考】如果曲线不变，将转轴定为 y 轴，体积又该如何计算呢？如果积分的区间改为$[0,2\pi]$，同学们能否利用例 4 的结果直接写出结论呢？（留作课后作业）

【课堂练习】1. 求椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

所围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周而形成的旋转椭球体的体积。



解：根据椭圆的对称性只需考虑在第一象限围成的曲边梯形绕 x 轴和 y 轴旋转一周而形成的旋转体的体积即可。

应用公式得，绕 x 轴旋转一周而形成的旋转椭球体的体积为

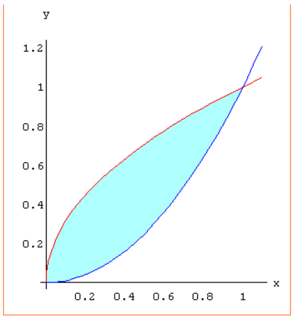
$$V_x = 2\cdot\pi\int_0^a y^2dx = 2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\cdot\left(a^2x-\frac{x^2}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{2\pi b^2}{a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

类似地由得，绕 y 轴旋转一周而形成的旋转椭球体的体积为

$$V_y = 2\cdot\pi\int_0^b x^2dy = 2\pi\int_0^b \frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)dy = \frac{4}{3}\pi ba^2.$$

2. 计算两条抛物线 $y^2 = x,\ y = x^2$ 在第一象限所围图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周而形成的体积。



五、小结概念，总结方法（3 分钟）

绕轴旋转形成的立体体积计算步骤：

1. 画出平面图并确定积分变量与积分区间；
2. 确定半径函数；
3. 求定积分。

【课后作业】 课本 326 页　1, 2, 5

六、板书设计，条理清晰

绕 x 轴旋转形成的立体体积：$V_x = \int_a^b \pi f^2(x)dx$

绕 y 轴旋转形成的立体体积：$V_y = \int_c^d \pi g^2(y)dy$

教学总结

本节课讲授了高等数学中定积分的一类重要应用——旋转体的体积。从实际问题入手，运用问题驱动法、案例教学法和启发式教学法，引导学生由浅入深的自主思考，激发其学习的积极性。本节内容是训练使用微元法的重要载体，对培养学生的数学建模能力、逻辑思维能力和抽象思维能力非常重要，同时也有助于夯实微积分的基础知识。在学习的过程中，虽然会对旋转轴的不同，选取不同的微元进行研究，但问题的核心是不变的，即把握微元法思想。明确微元选取方向和旋转轴的关系，通过确定积分微元和积分区间，即可得旋转体体积。

恩格斯指出："初等数学，即常数的数学，是在形式逻辑的范围内活动的，至少总的来说是这样；而变量数学——其中最主要的部分是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的应用"。在本节课当中，通过讲述利用微元法求旋转体的体积，体现了常量与变量、近似与精确、变与不变等矛盾的对立转化，从而化未知为已知，体现了对立统一法则和否定之否定法则。从初等数学到变量数学的过渡，反映了人类思维从形式逻辑向辩证逻辑的跨越，是人类的认识能力由低级向高级的发展。这也是结合本节课的内容，对同学们进行思政教育的切入点。

在我们的生活中，旋转体是非常常见的，比如上海的东方明珠，广州的小蛮腰，西方建筑中的钟楼等等，都是著名的旅游景点。通过列举生活中的例子，让同学们感叹数学之美，感叹数学在生活中的应用，感受数学的"冰冷"与"火热"的思考之间迸发出的火花。引导同学们从不同的角度去看世界，看生活，感受生活之美。也祝福同学们在学习和生活中"全力以赴，满载而归"！