货币的时间价值——复利与贴现

我们已经学习了数列极限与函数极限的基本知识，极限作为微积分的理论基础，不仅是分析变量无限变化趋势的核心工具，更能为实际问题提供严谨的数理支撑，在经济管理领域的应用尤为广泛。

资金时间价值是经济管理的核心概念，常规离散复利与贴现仅适用于固定计息周期，想要精准刻画资金连续增值与折现的真实规律，就需要借助极限思想，将离散模型推广至连续模型。本节我们以复利与贴现问题为例，讲解极限在资金价值分析中的具体应用。

一、复利

● 1.复利与连续复利

例1　假设有一笔本金 P_0 元，现将其存入银行，银行年复利率为 r，分别按下列三种方式结算利息，计算 t 年后的本利和（又称为P_0元资金在 t 年后的累积值或终值）。

（1）一年结算一次；

（2）若把计息周期缩短，一年按n期计息，即过 $\frac{1}{n}$ 年计一次息，每期利率按 $\frac{r}{n}$ 计算；

（3）如果银行连续不断地向储户付利息，即 $n \to \infty$ ，此种计息方式称为连续复利。

习惯上在做数理金融学：衍生品定价时或者套利运算时运用连续复利。

解（1）如果一年结算一次，那么一年后的本利和为：

$$P_1 = P_0 + P_0 r = P_0(1+r)$$

两年后的本利和为：

$$P_2 = P_1(1+r) = P_0(1+r)^2$$

以此类推可得，年后的本利和为

$$P_t = P_0(1+r)^t$$

解 （2）如果把计息周期缩短，一年结算n次，则t年将结算nt次，所以t年后的本利和为：

$$\tilde{P}_t = P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

即

$$\tilde{P}_t = P_0\left\{1+\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1\right]\right\}^t$$

与 $P_t = P_0(1+r)^t$ 式比较，可知若每年结算n次，相当于以年利率 $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1$按年计息方式结算，称 $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1$ 为按每年结算n次进行结算的实际年复利率。

解 （3）如果按连续复利方式计息，则 t 年后的本利和为

$$P_t^* = \lim_{n\to\infty} \widetilde{P}_t = \lim_{n\to\infty} P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$= P_0 e^{rt}$$

$$= P_0[1+(e^r-1)]^t$$

可知连续复利相当于以年利率 e^r-1 按年计息方式结算.

称 e^r-1 为按连续复利结算的实际年复利率或有效收益率，

当 r 较小时, $e^r-1\approx r$. 通常实际年复利率用符号 r_e 表示.

例2 某人在银行存入10000元，年复利率为10%，按下面两种情况计算实际年利率：（1）每半年结算一次；（2）按连续复利结算。

解 （1）若每半年结算一次，这时 $n=2$，则实际年复利率为：

$$r_e=\left(1+\frac{10\%}{2}\right)^2-1=10.25\%$$

（2）若按连续复利结算，则实际年复利率为：

$$r_e=e^{10\%}-1\approx 10.52\%$$

- **2.贴现**

累积值是一笔资金在未来时刻的价值，而现值是指未来的一笔资金在当前的价值。计算现值的过程正好与计算累积值的过程相反。求现值的过程又被称作贴现过程。

例3 如果在时期 t 末希望获得P_t元的累积值，按照上面给出的三种方式计算利息，现值应该是多少？

解 （1）若一年结算一次，则现值为

$$P_0 = P_t(1+r)^{-t}$$

元，即现在要存入银行的资金为P_0 元。

（2）若一年结算n次，则现值为

$$P_0 = P_t(1+\frac{r}{n})^{-nt}$$

（3）若按连续复利结算，则现值为

$$P_0 = P_t\, e^{-rt}$$

例4 假设你需要存一笔教育基金，希望6年后这笔基金的累积值为10万元，若年复利率为5% ，（1）如果按一年计息四次，你现在应存入多少本金？（2）如果按连续复利计息，你现在又应存入多少本金？

解 （1）若一年按四次计息，则6年后资金 $P_6 = 10$ 万元的现值为

$$P_0 = P_t(1+\frac{r}{n})^{-nt} = 10\times(1+\frac{5\%}{4})^{-4\times 6}$$

$$= 10\times 1.0125^{-24} \approx 7.42197$$

即现在要存入银行7.42197万元.

（2）若按连续复利计息，则6年后资金 $P_6 = 10$ 万元的现值为

$$P_0 = P_t e^{-rt} = 10\times e^{-5\%\times 6} \approx 7.40818$$

即现在要存入银行7.40818万元.