

一元函数微分学

导数与微分：导数的概念，导数的四则运算法则，复合函数的导数，反函数的导数，基本初等函数的求导公式，高阶导数的定义及计算，隐函数的导数，对数求导法，参数方程的导数，函数的微分，导数在经济学中的应用（边际函数与边际分析；弹性函数与弹性分析）

一. 导数定义

(一) 知识点

1. 导数的定义

$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{f(a + \square) - f(a)}{\square} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

$$f'(0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{f(\square) - f(0)}{\square} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

2. 左、右导数的定义

$$f'_-(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\square \rightarrow 0^-} \frac{f(a + \square) - f(a)}{\square} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

$$f'_+(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\square \rightarrow 0^+} \frac{f(a + \square) - f(a)}{\square} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

左导数 $f'_-(a)$ 不同于导函数 $f'(x)$ 在 $x=a$ 的左极限 $f'(a^-)$ ；右导数 $f'_+(a)$ 不同于导函数 $f'(x)$ 在 $x=a$ 的右极限 $f'(a^+)$ 。可以证明：当 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，导函数 $f'(x)$ 在 $x=a$ 的左(右)极限 $f'(a^-)$ ($f'(a^+)$) 存在时，则左(右)导数 $f'_-(a)$ ($f'_+(a)$) 必存在，且 $f'_-(a) = f'(a^-)$ ($f'_+(a) = f'(a^+)$)；当 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续时，上述结论不成立。

3. 微分概念

(1) 可微的定义：若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的全增量可写为

$$\Delta f(x) |_{x=a} = f(a + \Delta x) - f(a) = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (2.1)$$

时，则称 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可微。

定理 1 当 f 在 $x=a$ 处可微时， f 在 $x=a$ 处必连续。

定理 2 函数 f 在 $x=a$ 处可微的充要条件是 f 在 $x=a$ 处可导，且(2.1)式中的 $A = f'(a)$ 。

(2) 微分的定义：当函数 f 在 $x=a$ 处可微时， f 在 $x=a$ 处的微分定义为

$$df(x) |_{x=a} \stackrel{\text{def}}{=} f'(a)dx.$$

一般地，有

$$df(x) = f'(x)dx.$$

(二) 例题

例 1 设 $f(x) = \arcsin x \cdot \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$, 求 $f'(0)$ 。

例 2 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 欲使 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导, 则必有()。

- A. $f'(0) = 0$ B. $f(0) = 0$
 C. $f(0) + f'(0) = 0$ D. $f(0) - f'(0) = 0$

例 3 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{2x}{1+e^x}, & x > 0, \end{cases}$$

则函数在点 $x=0$ 处的导数为_____。

例 4 函数 $f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$ 不可导点的个数是()。

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

例 5 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$, 则()。

- A. $f(0) = 0$ 且 $f'_-(0)$ 存在 B. $f(0) = 1$ 且 $f'_-(0)$ 存在
 C. $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0)$ 存在 D. $f(0) = 1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

例 6 已知 $f(0) = 0$, $f'(0)$ 存在, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right) \right].$$

二、导数运算

(一) 知识点

4. 基本初等函数的导数公式

$$(x^\lambda)' = \lambda x^{\lambda-1}, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x,$$

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln |x|)' = \frac{1}{x},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \sec^2 x, \quad (\cot x)' = -\csc^2 x,$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x, \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x,$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\text{arccot } x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

熟记下列函数的导数

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad (\sqrt{1+x^2})' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (\sqrt{1-x^2})' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5. 求导法则

(1) 四则运算法则: 设函数 u, v 可导, 则

$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$
$$(uv)' = u'v + uv', \quad (cu)' = cu' \quad (c \in \mathbf{R}),$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

(2) 复合函数链式法则

$$(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

(3) 反函数、隐函数与参数式函数求导法则

(4) 取对数求导法则

$$f'(x) = f(x)(\ln |f(x)|)'$$

(二) 例题

例 7 设当 $x=0$ 时 $\frac{d}{dx}f(\sin x) = \frac{d}{dx}f^2(\sin x)$, $f'(0) \neq 0$, 则 $f(0) =$ _____。

例 8 已知 $y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x) = \arctan x^2$, 则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$ _____。

例 9 设函数 $g(x)$ 可微, $h(x) = e^{1+g(x)}$, $h'(1) = 1$, $g'(1) = 2$, 则 $g(1) =$ ()。

A. $\ln 3 - 1$ B. $-\ln 3 - 1$ C. $-\ln 2 - 1$ D. $\ln 2 - 1$

例 10 设 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$, 求 $\frac{d^2x}{dy^2}$, $\frac{d^3x}{dy^3}$ 。

三、高阶导数

(一) 知识点

6. 高阶导数

(1) 几个高阶导数公式

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}, \quad (\ln x)^{(n+1)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}},$$

$$(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \quad (1 \leq k \leq n), \quad (x^n)^{(k)} = 0 \quad (k > n), \quad (e^x)^{(n)} = e^x.$$

(2) 参数式函数的二阶导数

(3) 分段函数在分段点处的二阶导数

(4) 莱布尼茨公式: 设函数 u, v 皆 n 阶可导, 则

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \cdots + C_n^{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.$$

若 u, v 中有幂函数, 一般选用幂函数作 v 。

(二) 例题

例 12 求 $y = \arctan x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数。

例 13 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 则 $f''(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例 14 已知 $f(x) = \cos 2x$, 求 $f^{(2n)}(0)$ 。

例 15 已知 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, 求 $f^{(n)}(3)$ 。

例 16 设 $f(x) = \frac{x^n}{x^2 - 1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 求 $f^{(n)}(x)$ 。

三、泰勒公式与麦克劳林公式

(一) 知识点

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域 U 上 $n+1$ 阶可导, 则 $\forall x \in U$, 有

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_n(x). \quad (2.2)$$

称(2.2)式为 $f(x)$ 在 $x=a$ 的 n 阶泰勒公式, $R_n(x)$ 称为余项, 有

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}, \quad (2.3)$$

或

$$R_n(x) = o((x-a)^n). \quad (2.4)$$

其中 ξ 介于 a 与 x 之间, 并称(2.3)式为拉格朗日余项, 称(2.4)式为佩亚诺型余项。

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域 U 上 $n+1$ 阶可导, 则 $\forall x \in U$, 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + o(x^n). \quad (2.5)$$

称(2.5)式为 $f(x)$ 的麦克劳林公式。

(3) 几个常用函数的麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n),$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \cdots - \frac{1}{n}x^n + o(x^n).$$

(二) 例题

例 17. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cos 2x \cos 3x$ 对于 x 无穷小阶数等于_____.

例 18. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x \cos x \cos 2x$ 与 cx^2 为等价无穷小, 则 $c = \underline{\quad}$, $k = \underline{\quad}$.

例 19. 用泰勒公式求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x - \frac{x^3}{3}}{x^5}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

例 20. 求一函数 $f(x)$, 使其在任一有限区间上有界, 且满足方程 $f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = x - x^2$.

例 21. 设 $f(x)$ 三阶可导, 且 $f''(x) \neq 0$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''[a+\theta(x-a)](x-a)^2}{2} \quad (0 < \theta < 1)$$

证明: $\lim_{x \rightarrow a} \theta = \frac{1}{3}$.

四、洛必达法则

若在某极限过程中(下面以 $x \rightarrow a$ 为例), $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$, 则称 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型的未定式极限。类似地, 有 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, $0 \cdot \infty$ 型, $\infty - \infty$ 型, 以及 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型的未定式的极限, 洛必达法则是求上述未定式的极限的好方法。

定理 1(洛必达法则 I) 若在某极限过程中(下文以 $x \rightarrow a$ 为例),有

① $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$;

② $f(x), g(x)$ 在 $x=a$ 的某去心邻域内可导, $g'(x) \neq 0$;

③ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或} \infty)$,

则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或} \infty)$$

定理 2(洛必达法则 II) 若在某极限过程中(下文以 $x \rightarrow a$ 为例),有

① $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \infty$;

② $f(x), g(x)$ 在 $x=a$ 的某去心邻域内可导, $g'(x) \neq 0$;

③ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或} \infty)$,

则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或} \infty).$$

(3)其他型的未定式的极限

对于 $0 \cdot \infty, \infty - \infty$ 型的未定式,总可化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的形式;对 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型的未定式 u^v ,有

$$u^v = \exp(v \ln u) = \exp\left(\frac{\ln u}{1/v}\right),$$

这里 $\frac{\ln u}{1/v}$ 是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型。

例 22. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)}$.

例 23. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ (n 为自然数)

五、导数在几何上的应用

导数的几何应用(求极值、单调性、凹凸性、拐点、渐近线)

(一) 知识点

(1)单调性

可导函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增(减)的充要条件是 $f'(x) \geq 0(\leq 0)$ 。若 $f'(x) > 0, x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上严格增;若 $f'(x) < 0, x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上严格减。

(2) 极值

可导函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 取极值的必要条件是 $f'(a)=0$ 。反之,若 $f'(a)=0$,且

$$f'(x)(x-a) > 0 \quad (< 0),$$

这里 x 在 $x=a$ 的去心邻域内取值,则 $f(a)$ 为 $f(x)$ 一个极小值(极大值)。若 $f'(a)=0$,
 $f''(a)>0(<0)$,则 $f(a)$ 为 $f(x)$ 的极小值(极大值)。

(3) 最值

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $x_i \in (a, b)$ 是 $f(x)$ 的驻点(即 $f'(x_i)=0$)。 $x_j \in (a, b)$ 是 $f(x)$ 的不可导点,则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值分别为

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = \max\{f(x_i), f(x_j), f(a), f(b)\},$$

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = \min\{f(x_i), f(x_j), f(a), f(b)\}.$$

(4) 凹凸性、拐点

设 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导,当 $f''(x)>0$ 时, $f(x)$ 在 I 上的曲线是凹的;当 $f''(x)<0$ 时, $f(x)$ 在 I 上的曲线是凸的。二阶可导函数 $f(x)$ 有拐点 $(a, f(a))$ 的必要条件是 $f''(a)=0$ 。反之,若 $f''(a)=0$,且

$$f''(x)(x-a) \neq 0,$$

这里 x 在 $x=a$ 的去心邻域内取值,则 $(a, f(a))$ 是 $f(x)$ 的拐点。

(5) 作函数的图形

首先考察函数 $f(x)$ 的定义域,是否有奇偶性、周期性,是否连续;第二步求 $f'(x)$,确定驻点与不可导点,判别 $f(x)$ 的单调性,求其极值;第三步求 $f''(x)$,确定凹凸区间,求出拐点;第四步考察 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 的曲线的走向,即求 $y=f(x)$ 的渐近线;最后作 $y=f(x)$ 的简图。

(6) 渐近线

① 铅直渐近线:若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$,则 $x=a$ 是 $y=f(x)$ 的一条铅直渐近线。

② 水平渐近线:若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$ ($A, B \in \mathbf{R}$),则 $y=A$ 与 $y=B$ 是 $y=f(x)$ 的两条水平渐近线。 $y=f(x)$ 的水平渐近线最多有两条。

③ 斜渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$,则 $y=ax+b$ 是 $y=f(x)$ 的右侧斜渐近线;若

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = c$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - cx) = d$,则 $y=cx+d$ 是 $y=f(x)$ 的左侧斜渐近线。

$y=f(x)$ 的斜渐近线最多有两条; $y=f(x)$ 的水平渐近线与斜渐近线的总条数最多有两条。

例 24. 证明: $0 < x < \pi$ 时, 有 $\sin \frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}$ 。

例 25. 证明: $x > 0$ 时, 有 $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$ 。

例 26. 设 $0 < a < b$, 证明不等式 $\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$ 。

例 27. 设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln b^2 - \ln a^2 > \frac{1}{e^2}(b-a)$.

例 28. 设常数 $k > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内的零点个数 ()

A.3 B.2 C.1 D.0

例 29. 已知方程 $\log_a x = x^b$ 存在实根, 常数 $a > 1, b > 0$, 求 a, b 应该满足什么条件。

例 30. 求曲线 $y = e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{x - 2}$ 的渐近线.

六、导数在经济学中的应用（边际函数与边际分析；弹性函数与弹性分析）

（一）际

定义 1 设函数 $y = f(x)$ 在 x 处可导, 则称导数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的边际函数. $f'(x)$ 在 x_0 处的值 $f'(x_0)$ 为边际函数值. 即当 $x = x_0$ 时, x 改变一个单位, y 改变 $f'(x_0)$ 个单位.

1. 边际成本

定义 2. 如果经济变量 y 是另一经济变量 x 的函数, 即 $y = f(x)$, 则称 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的边际.

定义 3. 总成本函数 $C(Q)$ 的导数 $C'(Q) = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{C(Q + \Delta Q) - C(Q)}{\Delta Q}$ 称为边际成本。

定义 4. 平均成本 $\bar{C}(Q)$ 的导数 $\bar{C}'(Q) = \left[\frac{\bar{C}(Q)}{Q} \right]' = \frac{QC'(Q) - C(Q)}{Q^2}$ 称为平均边际成本.

2. 边际收益

定义 5. 总收益函数 $R(Q)$ 的导数 $R'(Q) = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta Q} = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{R(Q + \Delta Q) - R(Q)}{\Delta Q}$ 称为边际收益。

3. 边际利润

定义 6. 总利润函数 $L(Q)$ 的导数 $L'(Q) = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta L}{\Delta Q} = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{L(Q + \Delta Q) - L(Q)}{\Delta Q}$ 称为边际利润。

例 31. 某工厂对其产品的销售情况进行大量统计分析后, 得出总利润 $L(Q)$ (元) 与每月产量

Q (吨) 的关系为 $L(Q) = 250Q - 5Q^2$, 试确定每月生产 20 吨, 25 吨, 35 吨的边际利润, 并作出经济解释。

(二) 弹性

1. 弹性

定义 7. 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $x_0 \neq 0$, 称函数的相对改变量

$\frac{\Delta y}{y_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)}$ 与自变量的相对改变量 $\frac{\Delta x}{x_0}$ 之比 $\frac{\Delta y / y_0}{\Delta x / x_0}$ 为函数从 x_0 到 $x_0 + \Delta x$ 两

点间的平均相对变化率, 或称为从 x_0 到 $x_0 + \Delta x$ 两点间的弹性。

定义 8. 若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导, 且 $f(x) \neq 0$, 则称

$$\frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = y' \cdot \frac{x}{y}$$

为函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内的点弹性函数, 简称弹性函数。

2. 常见弹性函数

(1) 需求弹性

(2) 收益弹性