瞬时增量变化——边际

导数作为刻画函数瞬时变化率的核心工具，是微积分联系经济管理实践的关键桥梁，能够精准分析经济变量的动态变化速率，为各类经济决策提供定量依据。

在经济管理分析中，“边际”是衡量变量瞬时变动的核心概念，本质就是经济函数的导数，常用于分析成本、收益、利润等关键指标的边际变化规律。本节我们将依托导数的核心理论，重点讲解边际概念的数理内涵与实际应用，帮助大家掌握用导数解决边际经济问题的基本方法，体会高等数学在经济决策中的实用价值。

绝对变化量——边际

定义1 如果经济变量y是另一经济变量x的函数，即$y=f(x)$，则称$f'(x)$为函数$f(x)$的边际.

经济学解释： 由导数和微分的关系可知，当$|\Delta x|$很小时，

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x$$

如果取$|\Delta x| = 1$，则 $\Delta y \approx f'(x)$.

由此可知，边际近似地表示了经济变量x变化1个单位时，经济变量y的该变量.

例如，总成本函数 $C = C(Q)$，Q表示产量. 称$C'(Q)$为边际成本，表示当产量为Q个单位时，再多生产一个单位的产品，成本大约要增加 $C'(Q)$ 个单位.

函数为总收入函数$R=R(Q)$，则称$R'(Q)$为该产品产量为Q个单位时的边际收入；

函数为总利润函数$L=L(Q)$，则称$L'(Q)$为该产品产量为Q个单位时的边际利润；

总利润与总收入和总成本有如下关系：

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)$$

边际利润与边际收入和边际成本有如下关系：

$$L'(Q)=R'(Q)-C'(Q)$$

函数为消费函数$C=C(Y)$，则称$C'(Y)$为边际消费倾向；

函数为储蓄函数$S=S(Y)$，则称$S'(Y)$为边际储蓄倾向。

例 1 设某企业生产 Q 台某一型号冰箱的总成本（元）为：

$$C = C(Q) = 5000 + 300Q + 0.05Q^2 + 0.0001Q^3$$

（1）求生产前 100 台冰箱的平均成本；

（2）直接计算生产第 101 台冰箱的成本；

（3）求 $C'(100)$，并将其与（2）中的结果进行比较，说明 $C'(100)$ 的实际意义.

解 （1）生产前100台冰箱的平均成本为：

$$\overline{C}(100) = \frac{C(100)}{100} = 356（元）$$

（2）由总成本函数直接计算生产第101台冰箱的成本，得

$$C(101) - C(100) = 313.08（元）$$

（3）$C'(100) = 300 + 0.10 \times 100 + 0.0003 \times 100^2 = 313$（元）

与（2）中结果比较，有 $C(101) - C(100) \approx C'(100)$

因此C'(100)表示产量为100台时，生产第101台时所需要增加的成本大约为313元.

例2 设某服装企业制作牛仔裤的总收入函数为

$$R(Q)=83Q-0.04Q^2,$$

总成本函数为 $C(Q)=6000+3Q+0.01Q^2$, Q的单位为条，$R(Q)$和$C(Q)$的单位为元.

（1）分别求企业制作500条和900条牛仔裤的利润、平均利润及边际利润；

（2）是否产量越高，赚钱越多？

解 （1）利润函数为

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)=-6000+80Q-0.05Q^2$$

$Q=500$ 时, $L(500)=21500$（元）, $\overline{L}(500)=\dfrac{21500}{500}=43$ （元）

边际利润为 $L'(500)=80-0.1\times 500=30.$

即产量为500条时，再多制做1条总利润大约会增加30元.

$Q=900$时，$L(900)=25500$（元），$\overline{L}(900)=\dfrac{25500}{900}\approx 28.33$（元）

边际利润为$\boldsymbol{L'(900)=80-0.1\times 900=-10.}$

即产量为900条时，再多制做1条总利润大约会减少10元.

（2）由（1）中的结果可看出，制作900条牛仔裤的平均利润远低于制作500条牛仔裤的平均利润，且产量为500条时，再制作第501条时总利润会增加，而产量为900条时，再制作第901条时总利润会减少. 由此可见并不是产量越高，赚钱越多.

定义2 如果经济变量y是时间t的函数，即$y=F(t)$，则称导数$F'(t)$为t 时刻经济变量y的绝对变化速度.

这时$\Delta y \approx F'(t)\Delta t$，当$\Delta t=1$时，有$\Delta y \approx F'(t)$，表示单位时间内经济变量$y$的变化值可用$t$时刻经济变量$y$的绝对变化速度近似.