

讨论题 18：为冰激凌卖家解决困惑

以下为你提供两个参考答案，一个侧重于静态的最优定价模型，另一个侧重于动态的库存与天气依赖模型，并附带了课堂引导建议。

参考答案一：最优定价模型——贵多少，赚最多？

困惑描述：

冰淇淋卖家发现：天热的时候，5元一根能卖200根；天凉的时候，5元一根只能卖100根。但如果降价促销，销量会上升；如果提价，利润虽高但卖得少。卖家困惑：到底定什么价才能赚得最多？

数学模型的解读：

1. 需求函数的建立

首先，我们需要找到价格 p 与销量 q 之间的关系。假设通过几天的试验，卖家记录了数据：

- 价格 $p = 5$ 元时，销量 $q = 200$ 根（假设这是晴天数据）。
- 价格 $p = 4$ 元时，销量 $q = 260$ 根。
- 价格 $p = 6$ 元时，销量 $q = 150$ 根。

我们可以假设这是一个线性需求函数（最简单的近似）：

$$q = a - bp$$

代入数据，可以解出 a 和 b 。假设得到 $q = 400 - 40p$ （验证： $p = 5$ 时 $q = 200$ ； $p = 4$ 时 $q = 240$ ？注意数据需要拟合，这里仅为示例）。

2. 利润函数的构造

设每根冰淇淋的成本为 c 元（包括原料、蛋筒、电费），假设 $c = 2$ 元。

则利润函数为：

$$R(p) = (p - c) \times q = (p - 2)(400 - 40p)$$

展开得：

$$R(p) = -40p^2 + 480p - 800$$

3. 求寻找最优解

对 p 求导，并令导数为0：

$$R'(p) = -80p + 480 = 0 \Rightarrow p = 6$$

即最优定价为6元。

验证： $p = 6$ 时，销量 $q = 400 - 40 \times 6 = 160$ 根，利润 $= (6 - 2) \times 160 = 640$ 元。

对比： $p = 5$ 时利润 $= (5 - 2) \times 200 = 600$ 元； $p = 7$ 时利润 $= (7 - 2) \times 120 = 600$ 元。

6元确实最优。

4. 边际分析的解读

最优定价出现在**边际收益等于边际成本**处。这里的边际成本是常数2元，而边际收益是销售第 q 根带来的额外收入。通过导数，我们找到了使总利润最大的平衡点。

课堂引导语：

“卖家凭直觉可能会想‘薄利多销’或者‘奇货可居’。但数学告诉我们，在给定的需求曲线下，存在一个精确的最优点。这个点不是‘感觉’出来的，而是通过导数算出来的。这就是数学对‘恰

到好处'的量化。”

参考答案二：天气依赖模型——该不该看天气预报备货？

困惑描述：

冰淇淋卖家另一个困惑：每天进货太多，卖不完会化掉（损耗）；进货太少，好不容易遇到大热天却不够卖，白白损失机会。到底该进多少货？

数学模型的解读：

1. 引入随机变量

设每日的需求 q 不仅受价格影响，更受天气温度 T 影响。假设价格固定为 $p = 5$ 元，成本 $c = 2$ 元。

通过历史数据，卖家发现：

- 晴天 ($T \geq 30^\circ\text{C}$)：需求 $q \sim N(200, 20^2)$ ，即平均 200 根，标准差 20。
 - 阴天 ($T < 30^\circ\text{C}$)：需求 $q \sim N(120, 15^2)$ ，即平均 120 根，标准差 15。
- 如果进货量 Q 太大，卖不完的每根损失成本 $c = 2$ 元（融化了扔掉）；如果进货量 Q 太小，缺货的每根损失机会利润 $p - c = 3$ 元。

2. 期望利润函数

这是一个典型的报童问题。期望利润为：

$$E[\textit{profit}] = \int_0^Q [px - cQ]f(x)dx + \int_Q^\infty [pQ - cQ]f(x)dx$$

其中第一项是需求小于进货量时的利润（卖不完），第二项是需求大于进货量时的利润（全卖光）。

化简可得：

$$E[\textit{profit}] = (p - c)Q - (p - c) \int_0^Q (Q - x)f(x)dx$$

或者更直观地，从临界比的角度求解。

3. 临界分位数求解

最优订货量 Q^* 满足：

$$F(Q^*) = \frac{p - c}{p}$$

其中 F 是需求的累积分布函数， $\frac{p-c}{p}$ 是**临界比**（这里 $= (5 - 2)/5 = 0.6$ ）。

- 晴天时，需求 $N(200, 20^2)$ ，查表得 $F(Q) = 0.6$ 对应的 $Q \approx 200 + 0.25 \times 20 = 205$ 根（0.25 是标准正态 0.6 分位数）。
- 阴天时，需求 $N(120, 15^2)$ ， $F(Q) = 0.6$ 对应的 $Q \approx 120 + 0.25 \times 15 \approx 124$ 根。

所以，卖家的最优策略是：看天气预报！晴天进 205 根，阴天进 124 根。

4. 决策树视角

如果卖家不看天气预报，只能按平均情况进货（比如进 $Q = 160$ 根），那么晴天时会缺货（损失机会利润），阴天时会积压（损失成本）。通过数学，我们量化了“信息”的价值——天气预报能帮助卖家多赚钱。

课堂引导语：

“冰淇淋卖家的困惑，其实是所有零售商共同的难题：库存管理。数学里的报童模型告诉我们，最优库存不是简单地等于平均需求，而是要权衡‘积压的损失’和‘缺货的损失’。而这个权衡，最终归结为一个简单的分位数。数学让‘凭感觉进货’变成了‘按概率优化’。”

给老师的总结升华建议

在学生们讨论完这些例子后，你可以帮他们梳理出这类问题中的**核心数学思想**：

问题维度	数学工具	揭示的本质
定价决策	导数求极值、边际分析	找到利润最大化的精确价格点
库存决策	随机优化、报童模型、临界分位数	在不确定环境下平衡缺货与积压风险
信息价值	条件概率、贝叶斯更新	利用天气预报优化决策，量化信息的经济价值
需求估计	线性回归、数据拟合	从历史数据中提取需求与价格、天气的关系

可拓展的课堂提问：

- 如果卖家的冰淇淋不仅有固定的成本，还有每天固定的摊位费（固定成本），这会影响最优定价吗？（引出固定成本与边际决策的分离）
- 如果卖家可以提前一天订货，但天气当天才知道，他该如何利用天气预报信息？（引出两阶段决策、贝叶斯更新）
- 假设卖家可以同时卖冰淇淋和热饮（互补品或替代品），该如何联合优化？（引出多产品优化）