主题名称	导数的概念	**相关知识点**	函数极限
所属课程	高等数学	**授课时长**	1 学时，45 分钟
授课对象	大一国财务类专业	**教学资源**	多媒体
参考教材 章节位置	《高等数学及其应用》第二版 第 3 章 导数与微分 3.1 节 导数的概念		

学情分析

中学通过对平均速度、瞬时速度的学习，学生已经对变化率的概念有了初步的了解和直观的认知，这些将对本课程（导数的概念）的学习起到重要的铺垫作用。

本课的教学对象是国财务类专业大一年级，教学班级规模 120 人。由于各地区的教育差异及学生文理科的不同，导致学生的基础参差不齐，部分同学对数学有很好的兴趣，能积极探索问题本质及归纳结题技巧；但部分同学数学基础能力较弱，对抽象概念的理解不到位，缺乏对纯数学概念的学习兴趣。

教学目标

知识目标

(1)了解导数概念形成的过程，培养学生数学建模意识；

(2)理解导数的本质及几何意义；

(3)用导数的定义解决求导数问题。

能力目标

让学生经历将实际问题转化为数学问题，进而培养学生用数学知识分析问题和解决问题的能力。

情感态度目标

培养学生正确认识量变与质变、运动与静止等辩证唯物主义观点，形成正确的数学观。通过合作与交流，让学生感受探索的乐趣与成功的喜悦，体会数学的理性与严谨，激发学生对数学知识的热爱，了解数学史，从牛顿发现导数的过程培养学生的创新思维。

教学重点

导数的概念；应用导数的定义计算函数在一点处的导数。

教学难点

通过实例的学习加深对导数概念及实质的理解。

教学方法

导数是微分学中重要的核心概念，其产生的背景深刻且应用广泛。本节课设计的重点是如何把导数产生的背景、广泛的应用、抽象的概念融合渗透到德育和智育中去。为此，本节课引导学生在日常生活中乘坐高铁时观察到的两个细节入手，采用问题驱动模式，运用极限方法开展探究。让学生经历提出问题，分析问题和解决问题的全过程，培养学生的观察能力、抽象概括能力、分析问题和解决问题的能力。通过不同背景问题共性的概括，导数概念的产生自然是水到渠成。

在教学中采用引导发现式教学方法，类比抽象式教学方法，问题驱动式教学方法，案例式教学方法。教学中遵循“学生为主体，教师为主导，知识为主线，发展思维为主旨”的“四主”原则。以恰当的问题为引导，以对问题的探究为主线，综合运用讲授法、直观演示法、问题探究法等多种教学方法，给学生创设自主探究、合作交流的空间，指导学生类比探究形成导数的概念，让学生在参与中获取知识，发展思维，感悟数学。

教学内容与过程

一、创设情境，兴趣导入（2 分钟）

同学们，函数是高等数学研究的主要对象。在上一章我们用极限方法研究了函数的连续性。这一章我们继续使用极限方法给出研究函数的一个有力工具。

请看图片，第一个是高铁电子屏显示了高铁在变速行驶中每个时刻的速度。这个时刻的速度怎样求出来的？其实这个问题早在 1671，牛顿在《流数法和无穷级数》一书中提到：已知连续运动的路径，求给定时刻的速度。

第二个问题，当高铁驶入弯道时，为保持高铁的平稳运行，弯道的设计会涉及

到求曲线的切线斜率，这个切线斜率又如何求解呢？早在十七世纪，欧洲的数学家在光学透镜的设计以及炮弹弹道轨迹的计算中对曲线的切线已进行了研究。

变速直线运动的瞬时速度问题

设质点 M 沿直线作 $s=f(t)$ 的非匀速直线运动，$f(t)$ 为 t 时刻质点 M 所走的路程，在时段 $[t_0,t_0+\Delta t]$ 内，质点运动的平均速度为 $\bar{v}(t)=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$，$\Delta t$ 越小，$\bar{v}(t)$ 就越接近 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$，所以平均速度的极限就是 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$，即 $v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$。

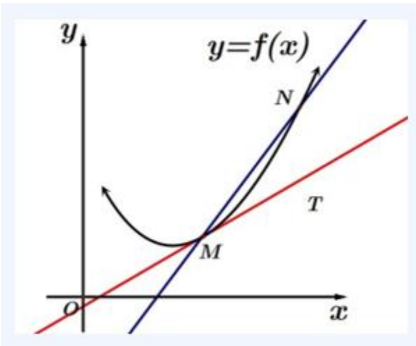
设计意图：

创设贴近生活的问题情境，反映数学的应用价值。借此机会介绍导数在微积分以及现实生活中的广泛应用，让学生在感受数学文化熏陶的同时，体会到学习导数的重要意义。培养学生兴趣，激发学习热情，体会数学无处不在。

二、几何分析，归纳共同点（3 分钟）

求曲线在一点处的切线斜率问题

教师借助多媒体进行图形演示，引导学生观察。



割线 MN 绕点 M 旋转而趋于极限位置 MT 时，直线 MT 就称为曲线 $\boldsymbol{C}$ 在点 M 处的切线。因 $\tan\varphi=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，切线应为割线的极限位置，故 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，即切线斜率。

设计意图：

(1)借助直观的动画，感悟在某一时刻的速度——瞬时速度是客观存在的，并与平均变化率存在必然的联系，及“以已知探求未知”的数学思想方法，让学生初步感受“无限”、“ 逼近”的思想。

(2) 从瞬时速度、切线的斜率两个具体模型出发，由特殊到一般、从具体到抽象利用类比归纳的思想学习导数概念；并通过几何直观和对比观察研究，引导学生探索变化率问题，建构导数的认知基础。从而总结归纳函数的导数的概念，引出下面问题。

三、数形结合，概念讲授（10 分钟）

【问题提出】在数学上是如何来描述变化率问题呢？

【概念探索】

虽然这两个问题的背景不同，但从数学上看二者本质却是相同的，都归结为函数在一点处的改变量和自变量改变量之比的极限。

在自然科学和工程技术领域内，还有许多问题都可归结为这种极限。所以我们就把这种极限抽象出来，上升为数学上的概念，就是今天我们要学习的导数概念。

1. 抽象出函数在一点的导数定义

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$.

【教师总结】

(1)根据某点处导数的定义：作非匀速直线运动瞬时速度为 $v(t_0)=s'(t_0)$；

(2)曲线 $y=f(x)$ 在某一点的切线的斜率就是其在 x_0 点的导数 $f'(x_0)$。这就是导数的几何意义：$f'(x_0)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率。

设计意图：

通过观察分析和类比归纳法，归纳出函数在一点处导数的定义，抽象概括出导数概念的本质，渗透数形结合思想。

2. 等价形式——第二定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在该邻域内从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时（$\Delta x\neq 0$），相应地函数 y 取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称该极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作 $y'|_{x=x_0}, f'(x_0)$或$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}, \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}。$$

导数表示函数 $f(x)$在 x_0 处关于自变量 x 的变化率，它反映了函数值随自变量变化而变化的快慢程度. 所以**导数的本质就是变化率**。

设计意图：

定义的两种形式刻画了函数在一点处导数的定义，强化引导学生发现学习，发现导数的内涵，领会其中的数学思想方法，体验成功的快乐。

四、连续启发，层层推进（10 分钟）

【问题提出】大家看，如何判断函数在一点是否可导呢？

教师引导学生分析，由导数的定义即可说明。

例 1.　求函数 $f(x)=x^2+2x-7$ 在 $x=a$ 处的导数。

解：　由定义可得

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[(a+\Delta x)^2+2(a+\Delta x)-7]-(a^2+2a-7)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}(2a+2+\Delta x)=2a+2 \end{aligned}$$

例 2.　求函数 $f(x)=\sin x$ 在点 $x=1$ 处的导数.

引导学生由导数的定义，可求得。其中用到了和差化积公式，是学生难点。

【问题提出】从导数的定义出发，总结出如何利用定义求函数在一点处导数？

【教师总结】引导总结出用定义求函数导数步骤：

(1)求增量　$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

(2)求增量的比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

(3)取极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

设计意图：

通过对例题的求解，逐层发问，采用连续启发式教学进行推导，让学生自解其惑。巩固导数的概念及求导的三个基本步骤，加深对导数概念的理解，为后面推导导数公式做铺垫。

五、拓展深化，强化训练（17 分钟）

1. 导函数

在定义中，我们给出的是函数 $y=f(x)$ 在固定点 $x=x_0$ 处的导数定义，如果将 x_0 换成变量 x，这时定义中的极限表达式变为下面形式：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

对于使这个极限存在的任意一个 x，都有惟一一个导数值 $f'(x)$ 与之对应，则由函数的定义知，我们可将 $f'(x)$ 看成是 x 的函数，并称这个函数为函数 $y=f(x)$ 的导函数，记作 $f'(x)$ 或 y'，$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{df(x)}{dx}$.

显然 $f'(x_0)$ 是导函数 $f'(x)$ 在 x_0 点的函数值，通常在不引起混乱的情况下，也称导函数 $f'(x)$ 为导数 $f'(x)$.

【练习】设 $f(x)=\sqrt{x}$，求导数 $f'(x)$ 及 $f'(x)$ 的定义域。

解　$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

因为当 $x>0$ 时，$f'(x)$ 存在，所以 $f'(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，小于 $f(x)$ 的定义域 $[0,+\infty)$.

定义　如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可导，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导。

【练习】设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，求下列各极限值：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$。

设计意图：

通过例题可以检测学生对知识的掌握情况，找到差距，更进一步巩固和深化新知识，让学生知道数学重在应用，培养学生运用所学知识解决问题的能力，有利于学生养成良好的学习习惯。

2. 左、右导数

我们知道，极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在的充分必要条件是两个单侧极限存在，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，如果这两个极限存在，则称左极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**左导数(left derivative)**，记作 $f'_-(x_0)$；称右极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**右导数(right derivative)**，记作 $f'_+(x_0)$，即

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

由此，我们可以得到一个判别函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处是否可导的常用方法：

$$f'(x_0)=A \iff f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$$

同样地，$f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 也可等价地表示为：

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\qquad f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

例 3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性。

设计意图：

(1)通过对上一章左右极限、极限存在充要条件等内容的回忆，引出左右导数的

概念以及可导的充要条件。让学生利用极限的定义去理解导数的概念和相关定理，学会用微积分的观点去分析数学问题。

(2)例 3 不仅能够让学生练习分段函数在分断点的可导性判定方法，而且也为后续讲解可导与连续的关系做出铺垫。

六、小结概念，总结方法（3 分钟）

归纳总结本节课的主要内容：

1. 理解和掌握函数在一点处导数的定义：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

2. 函数在一点处导数的实质：　因变量随自变量的变化而变化的快慢程度；
3. 函数在一点处导数的几何意义：曲线在该点处切线的斜率；
4. 理解左右导数，利用左右导数判别分段函数 $y=f(x)$ 在分段点处是否可导。

【思考】(1)函数在区间上的导数应该怎样定义？

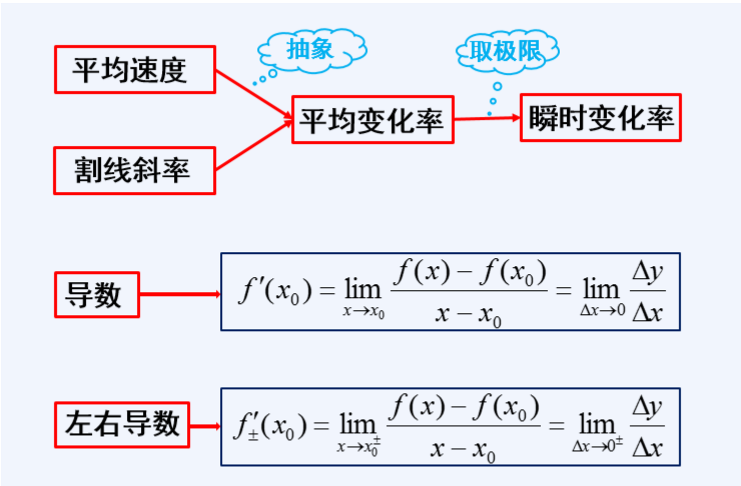
(2) $f'(x_0)=[f(x_0)]'$ 是否成立？为什么？

【课后作业】　课本 131 页 5, 6, 8

下节预习任务　求导法则

七、板书设计，条理清晰

力求条理清楚，便于学生从整体上认识、理解导数的概念及其求导数。



教学总结

教学过程中注意和前后知识的衔接，做到了承上启下。在引例中将第二章的极

限计算知识结合了起来，通过极限的运算说明了平均速度的极限就是瞬时速度，割线斜率的极限就是切线斜率。这样的计算一方面是两个极限计算的例题，另一方面也是两个利用定义计算导数的具体实例。通过两个实例的分析，了解导数概念的实际背景，知道函数的因变量随自变量的变化而变化的快慢程度即导数。

为了便于学生对导数本质的理解，从实际问题出发，以问题为主线，遵循特殊到一般，具体到抽象，用已知探究未知的思考方法，从变化率入手，用“逼近”方法定义导数，这样，避免了学生认知水平和知识学习间的矛盾，让学生更多精力用于导数本质的理解上，轻松获取知识，增强学生学习数学的兴趣，真正做到既关注学习的结果，又关注学习的过程。

在学习过程中，引入微积分的奠基人——英国牛顿和德国莱布尼茨，通过讲述他们的故事，让同学们感受到数学家们对历史的伟大推动作用。史书上记载，牛顿和莱布尼茨终身未婚，献身于科学研究。在微积分数学史上，有牛顿和莱布尼茨谁先发现微积分之争，演变成了英国科学界与德国科学界，乃至与整个欧洲大陆科学界的对抗。英国数学家们在很长一段时间坚持使用牛顿的微积分符号（莱布尼茨的微积分符号更简洁，更方便进行数学计算和研究）和过时的数学观念，不接受欧洲大陆数学家们的研究成果，使得英国的数学研究停滞不前，直到一个多世纪后英国才愿意承认其他国家的数学成果，重新加入国际主流。这个故事告诉我们：“科学没有国界，但是科学家有祖国”。通过后人的研究发现，牛顿是从力学研究的微积分，而莱布尼茨是从几何学研究的，他们得到了相同的结论。因此，现在的教科书上将牛顿和莱布尼茨共同列为微积分的创建者。

通过介绍数学家的故事，让同学们感受到所有伟大的人物对于历史的推动作用，虽说科学没有国界，但是科学家有祖国。转到中国历史来看，在祖国的帮助下，钱学森院士历尽艰辛，终于在 1955 年 10 月 8 日回到中国的大地上。在钱学森的努力带领下，1964 年 10 月 16 日中国第一颗原子弹爆炸成功，1967 年 6 月 17 日中国第一颗氢弹空爆试验成功，1970 年 4 月 24 日中国第一颗人造卫星发射成功。**虽说历史是人民创造的，但是英雄人物推动了历史的发展。**使得同学们在情感上产生共鸣，产生血浓于水的亲和力，增强民族自豪感。这也是结合本节内容，对同学们进行思政教育的切入口。

在教学过程中，注重以启发式、案例示范等方式引导学生一步一步去思考问题、解决问题，教学中注意和前后知识的衔接，做到了承上启下，避免平铺直叙式的灌输

知识，增强学生的学习积极性与课堂参与度。融入历史，让学生感受数学的研究背景和重大成就；巧设思考拓展，培养学生的创新意识与应用能力。