主题名称	不定积分的分部积分法	**相关知识点**	不定积分
所属课程	高等数学	**授课时长**	1 学时，45 分钟
授课对象	大一国财务类专业	**教学资源**	多媒体
参考教材 章节位置	《高等数学及其应用》第二版 第 5 章 积分 5.3 节　基本积分法		

学情分析

高等数学的核心内容是微积分，分部积分法是继换元积分法之后的另一个基本积分法。针对学生对高等数学等数学课缺乏学习动力的现象，本节课巧妙设计教学思路，逐步引导学生掌握分部积分公式，并在引导学生学习过程中，培养学生提出问题、分析探索问题的能力，促进学生养成一个良好的思维习惯。

教学目标

知识目标

(1)理解分部积分公式的定义，掌握分部积分法的实质；

(2)会正确使用分部积分法来求不定积分。

能力目标

(1)培养学生观察与类比的能力："会观察"，通过大量问题，会观察其共性及个性，提高学生提出问题、分析问题和解决问题的能力；

(2)培养学生归纳与总结的能力："敢归纳"，敢于对一些事例，通过观察后进行归纳，总结出一般规律；

(3)培养学生建构能力："善建构"，通过反复观察剖析与对比，对归纳得出结论，建构于自己的知识体系中。

情感态度目标

(1)通过以学生为主体的教学方法，让学生自己发现分部积分法求解规律，发展体验获取知识的感受，提高学生的学习热情，激发学生学习数学的兴趣。

(2)通过"会观察"，"敢归纳"，"善建构"，培养学生自主学习，勇于剖析，多方位审视问题的创新品质，培养学生创新意识和勇于探索的精神。

教学重点

分部积分公式概念，及运用分部积分其求不定积分的关键。

教学难点

如何将被积函数分成两部分，哪一部分作为u，哪一部分作为v，才能凑成有利于求解的分部积分公式的形式。

教学方法

(1)提出问题——根据皮亚杰建构主义认识论，知识是个体在与环境相互作用过程中逐渐建构的结果，而认识则是起源于主客体之间的相互作用。通过启发诱导式教学模式，在帮助学生回顾了换元积分法知识点之后，引导学生通过剖析被积函数的组成形式，老师进行适当的引导，让学生自己发现问题，提出问题：两种函数乘积的积分怎么求？具体举例发现利用之前学过的换元法不容易解决这类问题，引导学生积极探索，应用新的方法解决问题。

(2)解决问题——学生已经具备了良好的知识基础，剩下的问题就是能不能找到另一种积分的方法，使其更能适用于求被积函数为两个函数乘积形式的不定积分。让学生学会用已学知识来解决新问题，考虑到积分和求导之间的关系，利用两个函数乘积的求导公式逆向推导出分部积分公式。

(3)公式推广——将问题延伸，举例让学生了解不同的情况，得出分部积分公式在应用时是比较灵活的，激发学生继续探索的欲望。

教学内容与过程

一、创设情境，兴趣导入（3 分钟）

多媒体课件展示背景材料

【问题提出】在本章的前一节，我们已经学习了不定积分的换元积分法，掌握了第一换元和第二换元的要领。下面，我们来讨论用已有知识是否能解决这种问题。

(1) $\int \cos x dx = ?$（基本公式法）；

(2) $\int x \cos x^2 dx = ?$（凑微分）

(3) $\int x \cos x dx = ?$ 类似地，$\int x \sin x dx = ?$ $\int x e^x dx = ?$ 这类积分如何求解？

设计意图：

用换元法发现积分不容易求出，引导学生寻找新的方法。无论是基本积分公式还是换元积分法都不能求出这类积分问题，寻求新的求积分的方法，究竟这一类问题会涉及什么方法，而这个方法是怎么推演出来的？

二、回顾分析，归纳方法（5 分钟）

今天要学习的新方法——分部积分法，学习之前，首先回顾两个函数求导的知识（引导学生推导分部积分公式）：

我们知道，两个可导函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的乘积的导数公式是

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{或（移项得）} \quad uv' = (uv)' - u'v$$

两边作不定积分得 $\int uv'dx = \int (uv)' dx - \int u'vdx$，（显然，积分 $\int (uv)' dx = uv + C$）

即　$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$　（这里不加 C，是因为后边还有一个不定积分）

（如果我们将 $v'dx$ 凑成 dv 和 $u'dx$ 凑成 du 的话，那么这个公式就变为）

或　$\int udv = uv - \int vdu$，

这个公式称为**分部积分公式**。利用分部积分公式求不定积分的方法称为分部积分法。

设计意图：

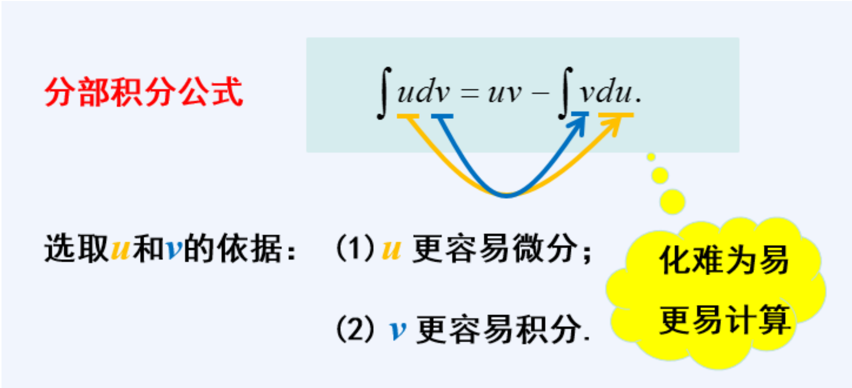
通过公式的推到过程，让学生感受“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”的美妙。通过上面的方法，我们顺利的解决两类函数乘积的积分。其实上面的公式正是这一节课要讲述的“分部积分法”。由两个函数乘积的导数公式推导出了分部积分公式，其目的是说明积的导数公式和分部积分公式之间的对应关系；另一方面，培养学生的观察能力，提高解决问题的能力。

三、连续启发，层层推进（10 分钟）

我们在推导分部积分公式时，是将被积函数的一个因式与 dx 凑成微分形式，这是使用分部积分公式的关键。也就是说，当被积函数是两种类型的函数乘积时，可以考虑利用分部积分法进行解决。

【问题提出】 如何把 $\int f(x)g(x)dx$ 凑微分变为 $\int u(x)dv(x)$？

【观察】 选取 u 和 v 的依据，u 更容易微分；v 更容易积分。要化难为易，更易计算。利用分部积分法，我们的一般步骤如下：**凑微分，用公式，算积分**。下面我们通过实例来探索 u 的选取顺序对解题的复杂程度的影响。



例1　求积分 $\int x\cos x dx = ?$

【分析】 观察题中的被积函数，是由幂函数和三角函数组成的。符合两类函数乘积的形式，可以使用分部积分法求解不定积分的值。但是把幂函数看成 u，还是把三角函数看成 u？

解： 法（一）令 $u=\cos x$，$xdx=\frac{1}{2}dx^2=dv$，$\int x\cos xdx \ =\frac{x^2}{2}\cos x+\int\frac{x^2}{2}\sin xdx$

显然，u,dv 选择不当，积分更难进行。

法（二）令 $u=x$，$\cos xdx = d\sin x = dv$

$$\int x\cos xdx \ =\int xd\sin x \ =x\sin x-\int\sin xdx \ =x\sin x+\cos x+C.$$

【推理】 当幂函数和三角函数组合作为被积函数时，取幂函数作为 u，起到降幂的作用，更有利于不定积分的计算。看来分部积分公式仍有内容需要挖掘，即 u 和 dv 在确定时并不是随意的。

【问题提出】 下列积分如何选取 u 呢？

$$\int x\underline{e^x}dx,\quad \int\underline{\sin x}e^x dx,\quad \int x\underline{\ln x}dx,\quad \int\underline{\arctan x}dx$$

$\int xe^xdx$	$\int\sin xe^xdx$	$\int x\ln xdx$	$\int\arctan xdx$
指	三角	幂 对数	反三角

口诀：反对幂三指（或者反对幂指三）

其中，**反**：反三角函数；**对**：对数函数；**幂**：幂函数；**三**：三角函数；**指**：指数函数。

按照口诀的顺序，越靠左的选为u，这样更容易积分，越靠右的选为v，这样更容易微分——这也是分部积分法的宗旨。如果被积函数只有一类函数，那么把它本身取作u即可。

设计意图：

提出两种选择u,v不同的方式，运用分部积分来求解该例题，通过分析比较这两种方式，领会如何恰当正确地运用分部积分公式，并鼓励学生多学习，多总结。

四、拓展深化，强化训练

类型 1（10 分钟）

形如$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx, \int P_n(x)\sin\beta x dx, \int P_n(x)\cos\beta x dx$等的不定积分，其中$P_n(x)$为多项式，$\alpha$和$\beta$为常数。

结论 1 分部积分公式具有降幂的作用。若被积函数是幂函数和三角函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为u,使其降幂一次(假定幂指数是正整数)。

设计意图：

提出两种非基本初等函数的形式，让同学们自己观察，自己总结，发现多项式函数与幂函数的关系，将多项式函数转化为幂函数的类别，利用口诀进行求解。得到最终的结论：分部积分法具有降幂的作用。

例 2　求积分$\int xe^x dx.$

【问题提出】如何选取u? 根据总结的口诀，例 2 中涉及的是幂函数和指数函数，因此将幂函数看做u。

解：$u=x,\quad e^x dx = de^x = dv,\quad du=dx,\quad v=e^x$

$$\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

可验算：$\left(xe^x - e^x + C\right)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

【小结】若被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就考虑设幂函数为 u，使其降幂一次(假定幂指数是正整数)。

【思考】$\int x^2 e^x dx = ?$需要几次分部积分法?

设计意图：

通过例 1 和例 2 总结归纳分部积分公式如何选取 u 和 v，培养学生由特殊到一般，自己发现问题，解决问题的能力。

类型 2（10 分钟）

形如 $\int P_n(x)\ln\alpha x dx, \int P_n(x)\arcsin\beta x dx, \int P_n(x)\arccos\beta x dx$ 等的不定积分，其中 $P_n(x)$ 为多项式，α 和 β 为常数。

结论 2　分部积分公式具有去掉对数函数、去掉反三角函数的作用。若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，考虑设对数函数或反三角函数为 u。

设计意图：

提出两种非基本初等函数的形式，让同学们自己观察，自己总结，发现多项式函数与幂函数的关系，将多项式函数转化为幂函数的类别，利用口诀进行求解。得到最终的结论：分部积分法具有去掉对数函数、去掉反三角函数的作用。

例 3　$\int x\ln x dx$

解：

$$\int \underline{x}\ln x \underline{dx} = \int \ln x d\underline{\frac{x^2}{2}} = \ln x\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2}{2}d\ln x$$

$$= \ln x\cdot\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \ln x\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x dx$$

$$= \ln x\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

例 4　求不定积分 $\int \arctan x dx$.

【分析】这个题被积函数仅有 $\arctan x$ 一个函数，当然我们可以把它看成是 $1\cdot\arctan x$，直接用分部积分公式得

解：

$$\int \arctan x dx = \arctan x\cdot x - \int x d\arctan x$$

$$= x\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

设计意图：

若被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就考虑设对数函数或反三角函数为 u，通过计算，加深了同学们对于优先选择 u 的意识，提高了同学们的逻辑思维能力。

类型 3（10 分钟）

形如 $\int \sin\alpha x e^{\beta x}dx$ 等的不定积分，其中 α 和 β 为常数。

结论 3　分部积分公式具有去掉三角函数、去掉指数函数的作用。若被积函数是三角函数和指数函数，利用口诀，任选其一为 u，通过多次分部积分，求得结果。

设计意图：

若被积函数是三角函数和指数函数的乘积，就考虑设其中一个为 u，通过计算，加深了同学们对于优先选择 u 的意识，提高了同学们的逻辑思维能力，并深入感受到分部积分法的内涵——u 更容易求导，v 更容易积分。

例 5.　求积分 $\int e^x \sin xdx$

【问题提出】选择哪一个作为 u 还是二者都可以？

解： $\int e^x \sin xdx = \int \sin xde^x = e^x \sin x - \int e^x d\sin x$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos xdx = e^x \sin x - \int \cos xde^x$$

$$= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x d\cos x) = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin xdx$$

$$\int e^x \sin xdx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

【小结】分部积分法可多次使用，但 u 的类型不能改变。

【思考】在例 5 中，我们选取的是三角函数作为 u，请同学们想一想，如果选取指数函数作为 u，能否得到相应的结论？

【练习】　1. 求积分 $\int \ln x\, d\, x$

【分析】可以看成 $\int 1\cdot\ln x\, d\, x$

解：设 $u = \ln x$，　$dv = dx$

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x d\ln x$$
$$= x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x dx$$
$$= x\ln x - \int dx$$
$$= x\ln x - x + C$$

【练习】2. 求积分 $\int x^3 \ln x dx.$

解： $u=\ln x,\quad x^3dx = d\frac{x^4}{4} = dv,$

$$\int x^3 \ln x dx \quad = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx \quad = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

设计意图：

通过巩固练习，鼓励学生遇到困难不能放弃，探求新的思路新的方法，培养学生勇于探索的顽强拼搏精神。

【内容总结】使用分部积分法的关键是正确地选取 u 和 dv，**常用的方法：**

把被积函数视为两个函数的乘积，按“反对幂三指”的顺序，前者为 u，后者为 dv，(因为“幂三指”好积，“反对”的导数比它自己简单)。

五、小结概念，总结方法（2 分钟）

本节应用分部积分公式解决了不定积分问题。分部积分法主要解决两个函数乘积的不定积分问题。

(1) 被积函数为函数乘积时，可考虑分部积分法：

$$\int f(x)g(x)dx = \int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

(2) 注意 u、v 选择，记住解题技巧：“反对幂三指”或“反对幂指三”。

(3) 使用分部积分法的关键：正确选取 u 和 dv。

(4) 分部积分法可多次使用，但 u 类型不变。

【思考】分部积分法中的“部”指的什么意思？

【课后作业】　课本 342 页　2,3

六、板书设计，条理清晰

1. 分部积分公式 $\int udv = uv - \int vdu$

2. 分部积分公式解决三种类型函数的不定积分问题。

教学总结

本节课通过提出问题引导学生用已学过的知识解决未知的问题，循序渐进的引导学生解决问题。在解决问题的同时要善于发现问题和总结规律，在学生掌握内容的同时，逐渐养成自己提出问题、探索问题并善于解决问题的能力。

本节课以问题引导式进行教学，层层相扣，从发现问题，提出问题，到解决问题，每个环节都很紧凑。学生在老师的引导下，也能有效的理解和应用分部积分法。教学过程中注意和已学过的知识前后衔接，做到了承上启下，避免填鸭式教学方式，让学生更容易接受新知识，增强学生上课的积极性和参与度。在引例中，不定积分的求解可以用已经学习的基本公式法和凑微分法，但是遇到了不能用已有的方法解决的不定积分。提出问题：能否探索一种新的方法去解决这类问题呢？利用已经学习的两类函数乘积求导的过程，反过来进行积分的推理，也就得出了本节课的新思路新方法：分部积分法。紧接着就引导同学们判定哪个位置是u，哪个位置是v，总结得出口诀。

爱因斯坦曾说：提出一个问题往往比解决一个问题更重要，因为解决问题也许仅仅是一个教学上或实验上的技能而已。而提出新的问题新的可能性，从新的角度去看旧的问题，都需要有创造性的想像力，而且标志着科学的真正进步。