专题一 中值定理

一 主要内容

1 罗尔定理：$y=f(x)$，1 $[a,b]$连续 2 (a,b)内可导 3 $f(a)=f(b)$，则存在$\xi\in(a,b)$有$f'(\xi)=0$

2 拉格朗日中值定理：$y=f(x)$，1 $[a,b]$连续 2 (a,b)内可导，则存在$\xi\in(a,b)$有$f'(\xi)(b-a)=f(b)-f(a)$

3 柯西中值定理：$f(x),g(x)$，1 $[a,b]$连续 2 (a,b)内可导，$g'(x)\neq 0$，则存在$\xi\in(a,b)$有$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

4 积分中值定理：$f(x)$在$[a,b]$上连续，则存在$\xi\in[a,b]$有$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

5 介质定理：$f(x)$在$[a,b]$上连续，$\mathrm{m,M}$分别为最小值和最大值，则对任何$c\in(\mathrm{m,M})$，存在$\xi\in(a,b)$，有$f(\xi)=c$

二 主要题型

题型 1 结论中只有一个中值ξ

方法：原函数法—通过构造原函数用罗尔定理证明

经典例题

例 1 设$a_1,a_2,\cdots a_n$满足关系式$a_1-\dfrac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{a_n}{2n-1}=0$，证明方程$a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内至少有一实根

例 2 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，证明存在$\xi\in(a,b)$使得

$$g(\xi)\int_a^{\xi}f(x)dx=f(\xi)\int_{\xi}^{b}g(x)dx$$

如何构造辅助函数

常用辅助函数：

1 $F(x)=e^{\pm kx}f(x)\Rightarrow kf(x)\pm f'(x)$

2 $F(x)=x^{\pm k}f(x)\Rightarrow kf(x)\pm xf'(x)$

3 $F(x)=e^{-x}\left(f(x)+f'(x)\right)\Rightarrow f(x)-f''(x)$

4 $F(x)=e^{G(x)}f(x)\Rightarrow f'(x)+G'(x)f(x)$

注：需灵活掌握辅助函数的构造

经典例题

例 3 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=1,f(1)=0$，证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

例 4 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0,f\left(\frac{1}{2}\right)=1,f(1)=0$，证明

（1）存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 有 $f(\eta)=\eta$ （2）对任意实数 k，存在 $\xi\in(0,\eta)$ 使

$f'(\xi)-k[f(\xi)-\xi]=1$

例 5 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

方法：罗尔定理和介值定理、积分中值定理联合使用

例 6 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{x-1}f(x)dx$，证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)+f'(\xi)=0$

关于介质定理的一个结论：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a\le x_1<x_2<\cdots<x_n\le b$，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$

例 7 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，证明存在 $\xi\in(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$

例 8 设 $f(x)$ 在区间 $[0,3]$ 上可导，且满足 $f(0)+f(1)=2\int_2^3 f(x)dx$，证明至少存在一

点 $\xi \in (0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$

题型 2 结论中有多于一个中值点

（1）方法：自己在中间找一个点，两边分别使用中值定理

例 9 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0, f(1)=1$，$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$，$\lambda_i>0$（$i=1,2,3$），证明存在 $x_1,x_2,x_3\in(0,1)$ 使得 $\frac{\lambda_1}{f'(x_1)}+\frac{\lambda_2}{f'(x_2)}+\frac{\lambda_3}{f'(x_3)}=1$

证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=0$，$f(1)=1$，由介值定理存在 $a\in(0,1)$ 使 $f(a)=\lambda_1$。又由 $\lambda_1<\lambda_1+\lambda_2<1$，知存在 $b\in(a,1)$ 使 $f(b)=\lambda_1+\lambda_2$。$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上应用拉格朗日中值定理 $\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(x_1)$，$x_1\in(0,a)$；$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_2)$，$x_2\in(a,b)$；$f(x)$ 在 $[b,1]$ 上应用拉格朗日中值定理 $\frac{f(1)-f(b)}{1-b}=f'(x_3)$，$x_3\in(b,1)$。于是 $\frac{\lambda_1}{f'(x_1)}+\frac{\lambda_2}{f'(x_2)}+\frac{\lambda_3}{f'(x_3)}=1$

例 10（课下作业）$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0, f(1)=1$，$a>0, b>0$，证明存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，$\xi\neq\eta$，使得 $\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$

提示：参考例 9 的证明

（2）使用两次中值定理—在同一区间使用两次中值定理

例 11 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，$f'(x)\neq 0$，证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，有 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$

例 12 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=1$，证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，有 $f(\eta)-f'(\eta)=e^{\eta-\xi}$

专题二 中值定理+定积分证明

一主要内容

费马定理：$y=f(x)$在x_0邻域有定义，在x_0可导，若在x_0取得极值，则$f'(x_0)=0$

导数的零点定理：$f(x)$在$[a,b]$中可导，$f'(\mathrm{a})\cdot f'(b)<0$，则存在$\xi\in(a,b)$有$f'(\xi)=0$

导数零点定理的应用

例 1 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f_+'(a)>0$，$f(b)<f(a)$。证明存在$\xi\in(a,b)$有$f'(\xi)=0$

泰勒公式：$f(x)$在(a,b)内至少有至$n+1$阶导数，$x_0\in(a,b)$，对任意$x\in(a,b)$有

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（$\xi$介于$x$与$x_0$之间）

和$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n+1}+o\left((x-x_0)^{n+1}\right)$

注:泰勒公式中带拉格朗日余项和佩亚诺余项的泰勒多项式能够展开的次数是不同的

主要方法：用泰勒公式直接证明

例 2 设$f(x)$在$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$。证明存在$\xi\in(-1,1)$使$f'''(\xi)=3$

例 3 设$f''(x)$在$[a,b]$内连续，证明存在$\xi\in(a,b)$有

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

注：泰勒公式在哪些点展开合适，需要自己体会。

用泰勒公式证明不等式

例 4 设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数，当$0\le x\le 1$时，$|f(x)|\le 1$，$|f''(x)|\le 2$，证明当$0\le x\le 1$时，$|f'(x)|\le 3$

例 5 设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶连续导数，且满足$f(0)=f(1)$及$|f''(x)|\le M$

$(x\in[0,1])$。证明对一切 $x\in[0,1]$ 有 $\left|f'(x)\right|\le\frac{M}{2}$

中值定理中 θ 问题

例 6 设 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta}}$， $x\ge 0$。证明 $\frac{1}{4}\le\theta\le\frac{1}{2}$

例 7 设 $f(x)$ 在 x 点领域内有 n+1 阶导数, $f^{n+1}(x)\ne 0$.证明在

$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}h^n$ 中有 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$

定积分证明

例 1 设 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上二阶连续可导， $f(3)=0$ 。证明存在 $\xi\in(2,4)$ 使 $f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)dx$

方法：变限法

例 2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $f(x)$ 单调上升。证明

$$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

例 3 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $f(0)=0$， $M=\max\limits_{0\le x\le a}\left|f'(x)\right|$.证明

$$\left|\int_0^a f(x)dx\right|\le\frac{M}{2}a^2$$

例 4 设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， $f(0)=f(1)=0$， $M=\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f'(x)\right|$.证明

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\le\frac{M}{4}$$

例 5 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\left|f'(x)\right|\le M$， 证明

$$\left|\int_a^b f(x)dx-f(a)(b-a)\right|\le\frac{M}{2}(b-a)^2$$

柯西施瓦兹不等式：设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$$

例 6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续一阶导数， $f(a)=0$.证明

$$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx$$

例 7 设 $f(x)$ 在 $[\mathrm{a,b}]$ 上连续，$f(a)=f(b)=0$，证对任意的 $x\in(a,b)$ 有

$$|f(x)| \le \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|dx$$

例 8 设 $f(x)$ 有界，$f'(x)$ 连续，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|f(x)+f'(x)|\le 1$，证明 $|f(x)|\le 1$

第一积分中值定理：设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[\mathrm{a,b}]$ 上连续，$g(x)>0(<0)$，则存在 $\xi\in[a,b]$ 有 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

例 $\int_a^b f(x)e^x dx = f(\xi)\int_a^b e^x dx = f(\xi)(e^b - e^a)$

练习 设 $f''(x)<0$，证明下列不等式成立

$$\int_0^1 f(x^2)dx \le f\left(\frac{1}{3}\right)$$

导数的介质定理（达布定理）：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f'_+(\mathrm{a}) \ne f'_-(b)$，$k$ 为介于 $f'_+(\mathrm{a})$ 与 $f'_-(b)$ 之间的任意实数，则存在 $\xi\in(a,b)$ 有 $f'(\xi)=k$

专题三 定积分证明

方法：柯西施瓦兹不等式

柯西施瓦兹不等式：设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

利用柯西施瓦兹不等式直接证明

例 1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 f^2(x)dx$

方法：变限法

例 2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且严格单调较少，证明当 $0<\lambda<1$ 时，

$$\int_0^\lambda f(x)dx > \lambda\int_0^1 f(x)dx$$

例 3 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)dx = 0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x dx = 0$.证明在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1 与 ξ_2 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$

方法：分部积分转换的方法

例 4 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(0)=0$，$M = \max\limits_{0\le x\le a}|f'(x)|$.证明

$$\left|\int_0^a f(x)dx\right| \le \frac{M}{2}a^2$$

例 5 设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)=0$，$M = \max\limits_{0\le x\le 1}|f'(x)|$.证明

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{M}{4}$$

例 6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $|f'(x)| \le M$，证明

$$\left|\int_a^b f(x)dx - f(a)(b-a)\right| \le \frac{M}{2}(b-a)^2$$

例 7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)=0$，证对任意的 $x\in(a,b)$ 有

$$|f(x)| \le \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|dx$$

例 8 设 $f(x)$ 有界，$f'(x)$ 连续，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|f(x)+f'(x)| \le 1$，证明 $|f(x)| \le 1$

第一积分中值定理：设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)\ge 0(\le 0)$，则存在 $\xi\in[a,b]$

有$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

例 9 $\int_a^b f(x)e^x dx = f(\xi)\int_a^b e^x dx = f(\xi)(e^b - e^a)$

方法：常数 k 值法

例 10 设 $f(x)$ 在 $[0,\mathrm{b}]$ 上连续，在 $(0.\mathrm{b})$ 内可导, $f(0)=0$.证明：至少存在一点 $\xi \in (0,b)$ 使 $f(\mathrm{b}) = (1+\xi)\ln(1+\mathrm{b})\mathrm{f}'(\xi)$

例 11 设 $f(x)$ 在 $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ 上存在二阶导数，证明存在 $\xi \in (\mathrm{a},b)$ 使 $\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{2}(\mathrm{f}(a)+\mathrm{f(b)})(\mathrm{b-a}) - \frac{1}{12}f''(\xi)(\mathrm{b-a})^3$

练习 设 $f''(x)<0$，证明下列不等式成立

$$\int_0^1 f(x^2)dx \le f\left(\frac{1}{3}\right)$$

专题四：中值定理和定积分证明特殊方法总结 1

情况 1：使用中值定理时两值中间找一点

例 1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{3}$，证明存在 $\xi\in(0,1)$, $\eta\in(0,1)$, $\xi\neq\eta$ 使 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

情况 2：特殊点泰勒展开—最大值、最小值点

例 2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内存在二阶导数，且 $|f''(x)|\geq m>0$，又设 $f(a)=f(b)=0$，证明 $\max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|\geq\frac{m}{8}(b-a)^2$

例 3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，证明对任意 $x\in[0,1]$ 有 $|f(x)|\leq\int_0^1[|f'(t)|+|f(t)|]dt$

情况 3：柯西施瓦兹不等式与不等式放缩相结合

例 4 设 $f(x)$ 在 $[\mathrm{a,b}]$ 上连续，且满足 $0<m\leq f(x)\leq M$.证明

$$(b-a)^2\leq\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\leq\frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2$$

情况 4：常熟 k 值法的巧妙使用

例 5 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使

$$\int_a^b f(t)dt=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3$$

情况 5：利用单调性的条件证明

例 6 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,\mathrm{b}]$ 上连续且单调，并且两者的单调性相同。证明

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx\leq(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx$$

一些其它特殊情况

例 7 设 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，又设 $u(t)$ 在 $[0,\mathrm{a}]$ 上连续，证明

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))dt\geq f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right)$$

例 8 设 $f(x)$ 在 $[-\mathrm{a,a}]$ 上具有二阶连续导数，其中 $a>0$，并设 $f(0)=0$.证明:在 $(-a,a)$ 内至少存在一点 ξ 使得 $a^3f''(\xi)=3\int_{-a}^a f(x)dx$

例 9 设 $f(x)$ 在 $[\mathrm{a,b}]$ 上具有连续的二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，当 $x\in(a,b)$ 时，

$f(x) \neq 0$。证明 $\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geq \frac{4}{b-a}$

例 10 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x) \geq 0, M = \max_{[a,b]} f(x)$，证明

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b \left[f(x)\right]^n dx} = M$

专题五 中值定理和定积分证明特殊方法总结 2

情况 1：与定积分几何意义相结合的证明

例 1 设在区间$[0,1]$上$y=f(x)\ge 0$且连续.证明存在点$x_0\in(0,1)$使得在区间$[0,x_0]$上以$f(x_0)$为高的矩形面积等于在$[x_0,1]$上以$y=f(x)$为曲边的曲边梯形面积。

例 2 设$y=f(x)$在$[0,+\infty)$上有连续的导数，$f(x)$的值域为$[0,+\infty)$，且$f(0)=0$，$f'(x)>0$，$x=\varphi(y)$为$y=f(x)$的反函数，设$a>0,b>0$.证明

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b \varphi(y)dy-ab\begin{cases}=0,a=\varphi(b)\\>0.a\ne\varphi(b)\end{cases}$$

情况 2：反证法与定积分几何意义结合

例 3 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，如果对于任意一个满足$g(a)=g(b)=0$且在$[a,b]$上连续的函数$g(x)$都有$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$ 证明$f(x)\equiv 0$

情况 3：一些定积分不等式的证明

例 4 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内存在二阶导数，且$f(0)=f(1)=0$，$\max\limits_{0\le x\le 1}\{f(x)\}=2$，证明存在$\xi\in(0,1)$，使$f''(\xi)\le -16$

例 5 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且对于$0<t<1$及任意$x_1\in[a,b],x_2\in[a,b],x_1\ne x_2$满足$f(tx_1+(1-t)x_2)<tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$，证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx<\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

情况 4：利用中值定理证明

例 6 设$f(x)$在$[0,+\infty$）上连续，在（$0,+\infty$）内存在二阶导数，且$f''(x)>0$，并设$f(0)=0$，证明对任意$x_1>0,x_2>0$都有$f(x_1+x_2)>f(x_1)+f(x_2)$

例 7 设$e<a<b<e^2$，证明$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$

例 8 设$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上均连续，在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$，证明存在$\xi\in(a,b)$使$f''(\xi)=g''(\xi)$

例 9 设$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上存在连续的一阶导数，在$(0,\frac{\pi}{2})$内存在二阶导数，且

$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 证明存在$\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使$f'(\xi)+f''(\xi)\tan\xi=0$

例 10 设$e<a<b$，证明：在区间(a,b)内存在一点ξ使

$$\begin{vmatrix} a, e^{-a}, \ln a \\ b, e^{-b}, \ln b \\ 1, -e^{-\xi}, \xi^{-1} \end{vmatrix}=0$$