一、函数与极限典型经济应用案例

函数与极限是高等数学的基础工具，其对变量关系的刻画和对变化趋势的分析能力，在经济金融、社会现象等领域有着广泛应用。

案例一：复利下贷款问题

问题背景

设一笔贷款 A_0 年利率为 r ，则 k 年后本利和为 $A_k = A_0(1+r)^k$.

大学生网贷 2000 元，周利率 30%，平台 3 个月的本利和为多少？

模型建立与求解

初始贷款本金 $A_0 = 2000$ 元，,周利率 $i = 30\% = 0.3$，3 个月按 12 周计算（通常 1 个月按 4 周计），网贷一般为复利计息，复利本利和公式为：$A_k = A_0(1+i)^k$，其中 k 为计息周期数。

将参数代入公式可得：

$A_{12} = 2000 \times (1+0.3)^{12}$，先计算 1.3^{12}，$1.3^{12} \approx 23.298$，

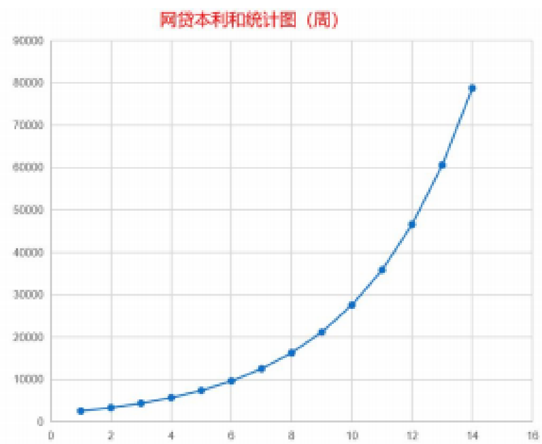
因此本利和为：

$$A_{12} \approx 2000 \times 23.298 = 46596 \text{ 元。}$$

经济意义

该周利率 30%远超国家规定的民间借贷利率司法保护上限（年化利率约 14.8%，折合周利率仅 0.28%），属于典型的高利贷，3 个月本利和从 2000 元飙升至 4 万余元，直观体现了“网贷无底洞”的危害性。

借款周数	本利和
1	2600
2	3380
3	4394
4	5712
5	7426
6	9654
7	12550
8	16315
9	21209
10	27572
11	35843
12	46596
13	60575
14	78748



案例二：连续复利下金额的投资问题

问题背景

考虑在初始本金P_0的基础上，银行提供年利率为r的存款服务。如果客户选择将这笔资金存放t年，那么存款的本利和为P_t。

（1）传统银行的年度结算周期是一年一结，初始本金与利息累积在第一年末为$P_1 = P_0 + P_0 r = P_0(1+r)$，第二年末则累计为$P_2 = P_1 + P_1 r = P_1(1+r) = P_0(1+r)^2$，以此类推，得到第$t$年末的本利和为：

$$P_t = P_0(1+r)^t$$

（2）如果银行调整结算频率，改为每月结算一次，即每年360次，那么月利率为$r_{月} = \frac{r}{12}$。在第t年的年末，在这样的结算方式下，本息总额为：

$$P_t = P_0(1+\frac{r}{12})^{12t}$$

（3）若进一步细化至每日结算，即一年365天，日复利率为$r_{日} = \frac{r}{365}$，能求得t年后的累计总额为：

$$P_t = P_0(1+\frac{r}{365})^{365t}$$

以此类推，根据上述情况，如果银行是一年n次地进行结算，那么第t年末的时候本利之和应该是：

$$P_t = P_0(1+\frac{r}{n})^{nt}$$

当结算周期$n\to\infty$时，运用第二重要极限可以求得第t年末本利之和为：

$$P_t=\lim_{n\to\infty}P_0(1+\frac{r}{n})^{nt}=P_0\lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{r}{n})^{\frac{n}{r}}\right]^{rt}=P_0e^{rt}$$

在上述计算步骤中，$n\to\infty$显然揭示了结算时段趋向于无限细分，这意味着银行必须不断地对客户进行利息支付，这种计算利息的方式被称为“**连续复利**”。

具体问题：国家向企业投资1000亿元，按连续复利率6%计算利息，规定20年后一次性收回投资基金，问到期时企业应向国家缴回投资基金多少亿元？

求解

由题意可知P=1000（亿元），r=0.06，x=20，

所以，20 年后企业应向国家缴回的投资基金为：

$$S=1000\times e^{20\times0.06}\approx3320.12\text{（亿元）}$$

案例三：连续复利下金额的现值

本金为 P ，按名义年利率 r 不断计算复利，则 x 年后的本利和为 $S=Pe^{rt}$（即连续复利计算公式），本金$P=Se^{-rt}$。

问题背景

连续复利的年利率为 0.6%，已知6年后到期的本利和（也叫终值）为100万元，问本金（也叫现值）是多少？

模型建立与求解

由题意可知$S=100, r=0.006, x=6$，

所以，本金为$P=\boldsymbol{S\cdot e^{-rt}}=100\times e^{-0.006\times6}\approx96.46$（万元）。

案例四：谣言传播问题研究

问题背景

在传播学中存在一个规律：在某种特定的情况下，谣言的传播可以用函数$p(t)=\dfrac{1}{1+ae^{-kt}}$来描述，其中$p(t)$表示$t$时刻已知谣言的人数比例，$a$与$k$均为正数.请计算$\lim_{t\to\infty}p(t)$并解释其实际意义。

模型建立与求解

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+ae^{-kt}} = 1 \text{。} \quad p(t) \text{ 是 } t \text{ 时刻已知谣言的人数比例为 100\%。}$$

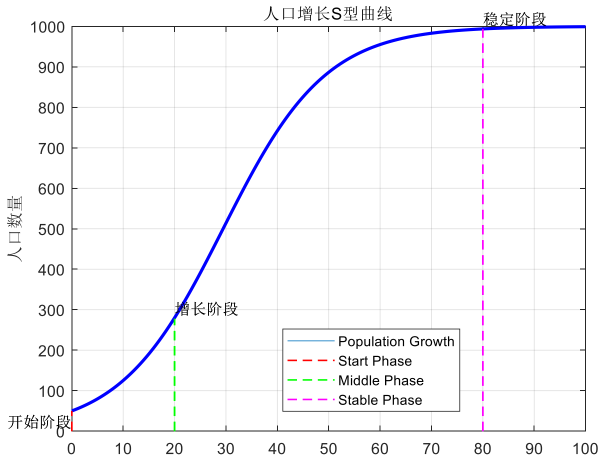


图　Logistic 曲线

这个函数的图象也称为Logistic 曲线，它一般被分成 5 个阶段：开始、加速、转折、减速以及饱和阶段。这种划分从数学理论上解释了谣言传播问题，比如在“新冠肺炎”期间人们抢购莲花清瘟和口罩，以及日本核辐射泄露后出现的全国“抢盐潮”，　当谣言迅速蔓延时突然而止.由此说明：随着时间的推移，最终所有人都将会知道此谣言.

案例五：城市垃圾的处理问题

问题背景

据某市 2010 年末的统计资料显示，到 2010 年末，该市已堆积垃圾达 100 万吨。根据预测，从 2010 年起该市还将以 5 万吨的速度产生新的垃圾。如果从

2011 年起该市每年处理上一年堆积垃圾的 20%，那么长此以往，该市的垃圾能否全部处理完成？

模型建立与求解

设 2010 年后每年的垃圾数量分别是 a_1、a_2、a_3、$\cdots$，根据题意，得

$$a_1 = 100(1-20\%) + 5 = 100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^1 + 5$$

$$a_2 = a_1 \times 80\% + 5 = 100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 5 \times \frac{4}{5} + 5$$

$$a_3 = a_1 \times 80\% + 5 = 100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 + 5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 5 \times \frac{4}{5} + 5$$

以此类推，$n(n \to \infty)$ 年后的垃圾数量：

$$a_n = 100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + 5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} + \cdots + 5 \times \frac{4}{5} + 5$$

根据数列求和及极限知识可知：

$$a_n = 100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}} = 100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 25 \times \left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$$

所以，$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 25$(万吨)。

随着时间的推移，按照这种方法并不能把所有的垃圾处理完，剩余的垃圾将会维持在某一个固定的水平。

案例六：需求函数、利润函数、成本函数、收益函数、均衡价格

1 若某商品的需求量 Q 是价格 P 的线性函数。已知每台售价 500 元时，每月可销售 1500 台，如果每台售价降为 450 元时，每月可增销 250 台，试求线性需求函数。

解 设 $Q=aP+b$ ，由题意得：$\begin{cases}1500=500a+b\\1750=450a+b\end{cases}$，解得 $a=-5,b=4000$ ，于是需求函数为 $Q=-5P+4000$（台）.

2 设某商品的需求函数为 $Q=-aP+b, a>0,b>0$，讨论当 $P=0$ 时的需求量和当 $Q=0$ 时的价格.

解 当价格 $P=0$ 时，需求量 $Q=b$，表示当价格为零时，消费者对商品的需求量为 b ，b 也就是市场对该商品的饱和需求量；

当需求量 $Q=0$ 时，价格 $P=\dfrac{b}{a}$，表示当价格上涨到 $\dfrac{b}{a}$ 时，没有人愿意购买该商品.

3 已知某商品的需求函数和供给函数分别为 $Q_d=10-P,Q_s=-5+4P,$ 求该商品的均衡价格.

解 由 $Qd=Qs$ ，即 $10-P=-5+4P$,解得：$P=3$，即均衡价格 $P_0=3$.

4 设生产某种产品，固定成本 1000（元），可变成本 4（元），每件售价 7（元），求：

（1）总成本函数；（2）单位成本函数；（3）总收益函数； （4）总利润函数.

解 设产量为 Q（件），则

（1）总成本函数 $C(Q)=1000+4Q$（元）；

（2）单位成本函数 $\bar{C}(Q)=\dfrac{1000}{Q}+4$（元/件）；

（3）总收益函数 $R(Q)=7Q$（元）；

（4）总利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=3Q-1000$（元）。