六、差分方程典型经济应用案例

差分方程作为描述离散时间序列动态变化规律的重要数学工具，在经济管理领域的资金规划、宏观经济分析、消费储蓄决策、信贷业务核算等场景中发挥着关键作用。相较于研究连续变量的微分方程，差分方程更适配经济活动中"分期计息""年度收支""月度还款" 等离散时间维度的问题，能够精准刻画不同周期下经济变量的递推关系与演变趋势。

案例一：存款复利模型

问题背景

某企业将 100 万元初始资金存入金融机构，按期结息，每期利率为 4%，按复利计算，求第 10 期期末的资金总量。

建模与求解

设Z_t为第t期期末的资金总量。复利模式下，下一期资金是当期资金与当期利息之和，因此建立一阶线性齐次差分方程：

$$Z_{t+1} = Z_t(1+r),$$

其中利率$r\ =\ 4\% = 0.04$，初始条件$Z_0 = 100$万元。

该方程的特征方程为$r = 1.04$，通解为$Z_t = C(1.04)^t$。代入初始条件$t = 0$，$Z_0 = 100$，得$C = 100$。因此特解为$Z_t = 100 \times (1.04)^t$。

第 10 期期末资金总量$Z_{10} = 100 \times (1.04)^{10} \approx 148.02$万元。

经济意义

此模型体现了复利下资金的时间价值，差分方程清晰刻画了资金随计息周期的增长规律，可用于企业和个人的短期资金规划。

案例二：教育经费筹措模型

问题背景

某家庭计划 20 年后每月从账户支取 1000 元，持续支取 10 年至资金用完。月利率为 0.5%，求 20 年内需筹措的总资金，以及每月需存入的金额。

建模与求解

分两个阶段分析，第一阶段是前 20 年（240 个月）存款，第二阶段是后 10 年（120 个月）支取。

设第二阶段第t个月期末账户余额为B_t，每月支取 1000 元，月利率 0.5%，则差分方程为

$$B_t = (1+0.005)B_{t+1} - 1000,$$

即$B_{t+1} = \frac{B_t+1000}{1.005}$，边界条件$B_{120} = 0$。

方程通解为$B_t = C(1.005)^{-t} + 200000$，代入$B_{120} = 0$，得$C = -200000 \times (1.005)^{-120}$，则 20 年末账户需筹措的资金

$B_0 = 200000 - 200000 \times (1.005)^{-120} \approx 90073.45$元。

再设前 20 年每月存入a元，第t个月期末余额为A_t，差分方程为

$$A_t = (1.005)A_{t-1} + a,$$

初始条件$A_0 = 0$，通解为

$$A_t = C(1.005)^t - 200a。$$

代入$A_0 = 0$得$C = 200a$，再由$A_{240} = 90073.45$，解得$a \approx 194.95$元。

经济意义

模型通过分阶段差分方程，解决了长期定额支取目标下的前期储蓄规划问题，为家庭教育、养老等长期财务计划提供数学支撑。

案例三：哈罗德经济增长模型

问题背景

分析国民收入、储蓄与投资的动态关系。设Y_n为第n期国民收入，S_n为储蓄，I_n为投资。储蓄与国民收入关系为$S_n = sY_n$（$0 < s < 1$为边际储蓄倾向），投资与前两期国民收入差关系为$I_n = k(Y_n - Y_{n-1})$（$\mathrm{k} > 0$为资本加速系数），均衡条件$S_n = I_n$，求国民收入的变化规律。

建模与求解

将储蓄和投资函数代入均衡条件，得$sY_n = k(Y_n - Y_{n-1})$，整理为一阶线性齐次差分方程

$$(k-s)Y_n - kY_{n-1} = 0。$$

特征方程为$(k-s)r - k = 0$，解得特征根$r = \frac{k}{k-s}$。通解为$Y_n = C\left(\frac{k}{k-s}\right)^n$。若取$s = 0.2$，$k = 2$，则$Y_n = C\left(\frac{2}{2-0.2}\right)^n = C\left(\frac{10}{9}\right)^n$。

经济意义

该模型揭示了国民收入的增长依赖边际储蓄倾向和资本加速系数，差分方程的解体现了国民收入的长期增长趋势，为宏观经济增长政策制定提供参考。

案例四：等额房贷还款模型

问题背景

某人贷款 60 万元购房，年利率 6%，贷款期限 10 年，按月等额还款，求每月还款金额。

建模与求解

设每月还款a元，第t个月还款后欠款为A_t，月利率$\mathrm{r}=\frac{6\%}{12}=0.005$，还款总期数$12\times 10=120$个月。

差分方程为

$$A_t=(1+0.005)A_{t-1}-a,$$

初始条件$A_0=600000$元，边界条件$A_{120}=0$。

方程通解为

$$A_t=C(1.005)^t+200a。$$

代入$A_0=600000$得$C=600000-200a$，再代入$A_{120}=0$，解得

$$a=\frac{600000\times 1.005^{120}}{200\times(1.005^{120}-1)}\approx 6661.23元。$$

经济意义

该模型是差分方程在消费信贷领域的典型应用，可帮助金融机构设计还款方案，也能让借款人清晰了解还款压力，是房贷、车贷等信贷业务的核心计算工具。

案例五：消费-储蓄模型

问题背景

假设某家庭的初始储蓄为 $S_0=10000$ 元，每年的可支配收入为 $Y_t=50000$ 元（固定不变）。根据消费理论，家庭每年的消费 C_t 由“自发消费”和“引致消费”组成：自发消费为 10000 元，引致消费是上一年可支配收入的 60%；储蓄 S_t 为当年可支配收入与消费的差额，即 $S_t=Y_t-C_t$。试建立储蓄的差分方程，求第 t 年的储蓄额，并分析长期储蓄趋势。

建模步骤

1. 定义变量：

t：时间（年），$\mathrm{t} = 0,1,2,\cdots$，$C_t$：第 t 年的消费额

S_t：第 t 年的储蓄额

$Y_t = 50000$：固定可支配收入

2. 建立消费方程：

引致消费依赖上一年收入（经管类常见“滞后效应”假设），因此：

$$C_t = 10000 + 0.6Y_{t-1}$$

由于 Y_t 固定，$Y_{t-1} = 50000$，代入得：

$$C_t = 10000 + 0.6 \times 50000 = 40000$$

3. 建立储蓄差分方程：

由 $S_t = Y_t - C_t$，代入 $Y_t = 50000$ 和 $C_t = 40000$，得：

$$S_t = 50000 - 40000 = 10000$$

但此为常数解，若考虑收入增长（更贴合实际），假设 $Y_t = Y_{t-1} + 2000$（年收入增长 2000 元），则：

$$C_t = 10000 + 0.6Y_{t-1}$$

$$S_t = Y_t - C_t = (Y_{t-1} + 2000) - (10000 + 0.6Y_{t-1}) = 0.4Y_{t-1} - 8000$$

又 $Y_t = Y_{t-1} + 2000$ 是一阶线性非齐次差分方程，其解为 $Y_t = Y_0 + 2000t$（设初始收入 $Y_0 = 50000$），代入储蓄方程：

$$S_t = 0.4\big(Y_0 + 2000(t-1)\big) - 8000 = 0.4 \times 50000 + 800(t-1) - 8000$$
$$= 12000 + 800t$$

简化为标准一阶线性差分方程形式：

$$S_t - S_{t-1} = 800$$

（因 $S_t - S_{t-1} = (12000 + 800t) - \big(12000 + 800(t-1)\big) = 800$）

求解过程

对于一阶线性非齐次差分方程 $S_t - S_{t-1} = 800$，初始条件 $S_0 = 10000$：

1. 齐次方程求解：齐次方程 $S_t - S_{t-1} = 0$ 的解为 $S_t^h = A$（A 为常数）。

2. 特解求解：非齐次项为常数 800，设特解 $S_t^* = kt$，代入方程：

$$kt - k(t-1) = 800\text{，解得 } k = 800$$

故特解为 $S_t^* = 800t$。

3. 通解与定解：通解为齐次解加特解 $S_t = A + 800t$，代入初始条件 $S_0 = 10000$：

$$10000 = A + 0\text{，解得 } A = 10000$$

最终解为：

$$S_t = 10000 + 800t$$

经济意义

储蓄额 S_t 随时间 t 线性增长，每年增加 800 元，符合"收入增长带动储蓄增长"的经济规律。

初始储蓄 $S_0 = 10000$ 元，第 5 年储蓄为 $S_5 = 10000 + 800 \times 5 = 14000$ 元，第 10 年为 18000 元，长期趋势为持续增长，反映家庭收入增长对储蓄的正向影响。

案例六：投资决策模型

问题背景

某企业进行设备投资，设第 t 年的投资额为 I_t，根据加速原理（经管类核心理论），投资额与产量的变动量成正比。已知产量 Q_t 满足二阶差分方程 $Q_t - 3Q_{t-1} + 2Q_{t-2} = 0$（初始产量 $Q_0 = 100$，$Q_1 = 150$），加速系数为 2（即 $I_t = 2(Q_t - Q_{t-1})$）。试求第 t 年的投资额 I_t，并分析投资趋势。

建模步骤

1. 定义变量：

 t：时间（年），$\mathrm{t} = 0,1,2,\cdots$

 Q_t：第 t 年的产量

 I_t：第 t 年的投资额

 加速系数 $v = 2$，故 $I_t = v(Q_t - Q_{t-1}) = 2(Q_t - Q_{t-1})$

2. 求解产量的二阶差分方程：

产量方程为二阶线性齐次差分方程：

$$Q_t - 3Q_{t-1} + 2Q_{t-2} = 0$$

特征方程为：

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

解得特征根 $r_1 = 1$，$r_2 = 2$（两个不同实根）。

3. 建立投资额的差分方程：

产量的通解为 $Q_t = A \cdot 1^t + B \cdot 2^t = A + B \cdot 2^t$，代入初始条件：

$t = 0$：$100 = A + B$

$t = 1$：$150 = A + 2B$

解得 $A = 50$，$B = 50$，故产量的特解为：

$$Q_t = 50 + 50 \cdot 2^t = 50(1 + 2^t)$$

代入投资额公式 $I_t = 2(Q_t - Q_{t-1})$：

$$I_t = 2[50(1 + 2^t) - 50(1 + 2^{t-1})] = 100(2^t - 2^{t-1}) = 50 \cdot 2^t$$

转化为标准二阶差分方程：

由 $I_t = 50 \cdot 2^t$，得 $I_{t-1} = 50 \cdot 2^{t-1}$，故 $I_t = 2I_{t-1}$，进一步推导二阶形式：

$$I_t - 3I_{t-1} + 2I_{t-2} = 0$$

（验证：$50 \cdot 2^t - 3 \cdot 50 \cdot 2^{t-1} + 2 \cdot 50 \cdot 2^{t-2} = 50 \cdot 2^{t-2}(4 - 6 + 2) = 0$，成立）

求解过程

1. 特征方程法求解投资额方程：

投资额的二阶齐次差分方程 $I_t - 3I_{t-1} + 2I_{t-2} = 0$，特征方程同产量方程，特征根 $r_1 = 1$，$r_2 = 2$，通解为：

$$I_t = C_1 \cdot 1^t + C_2 \cdot 2^t = C_1 + C_2 \cdot 2^t$$

2. 利用初始条件定解：

由 $Q_t = 50(1 + 2^t)$，计算初始投资额：

$t = 1$：$I_1 = 2(Q_1 - Q_0) = 2(150 - 100) = 100$

$t = 2$：$Q_2 = 50(1 + 4) = 250$，$I_2 = 2(250 - 150) = 200$

代入通解：

$t = 1$：$100 = C_1 + 2C_2$

$t=2$：$200=C_1+4C_2$

解得 $C_1=0$，$C_2=50$，故投资额的特解为：

$$I_t=50\cdot 2^t$$

经济意义

投资额 $I_t=50\cdot 2^t$ 呈指数增长，因产量 Q_t 以指数形式增长（特征根 $r_2=2>1$），符合加速原理“产量增长带动投资加速增长”的规律。

第 3 年投资额 $I_3=50\times 8=400$，第 4 年 $I_4=800$，反映企业在产量快速增长阶段需持续加大投资，长期趋势为投资规模指数扩张。

案例七：市场均衡模型

问题背景

某商品的市场供需满足以下关系：

需求函数：$D_t=100-2P_t$（D_t 为第 t 年需求量，P_t 为第 t 年价格）

供给函数：$S_t=-20+3P_{t-1}$（供给存在滞后效应，S_t 为第 t 年供给量，依赖上一年价格 P_{t-1}）

市场均衡条件为 $D_t=S_t$，初始价格 $P_0=30$。试建立价格的差分方程，求均衡价格 P_t，并分析价格是否收敛于稳定均衡。

建模步骤

1. 利用均衡条件建立差分方程：

由 $D_t=S_t$，代入供需函数：

$$100-2P_t=-20+3P_{t-1}$$

整理为标准一阶线性非齐次差分方程：

$2P_t+3P_{t-1}=120$ 即 $P_t+1.5P_{t-1}=60$ 。

2. 定义稳定均衡价格：

稳定均衡时价格不再变动，即 $P_t=P_{t-1}=P_e$（均衡价格），代入方程：

$P_e+1.5P_e=60,$ 解得 $P_e=24$ 。

需分析实际价格 P_t 是否收敛于 24。

求解过程

1. 求解一阶线性非齐次差分方程：

方程形式：$P_t-(-1.5)P_{t-1}=60$，其中系数 $a=-1.5$，非齐次项 $b=60$。

齐次方程解：$P_t^h=A\cdot(-1.5)^t$（A 为常数）。

特解求解：非齐次项为常数，设特解 $P_t^*=K$（常数），代入方程：

$$\mathrm{K} + 1.5\mathrm{K} = 60 \text{ 解得 } \mathrm{K} = 24$$

通解：$P_t=P_t^h+P_t^*=A\cdot(-1.5)^t+24$。

2. 利用初始条件定解：

代入 $t=0$，$P_0=30$：

$$30 = \mathrm{A}\,(-1.5)^0 + 24，\text{ 解得 } \mathrm{A} = 6$$

故价格的特解为：

$$P_t=6\cdot(-1.5)^t+24。$$

3. 稳定性分析：

差分方程的特征根为 $r=-1.5$，其绝对值 $|r|=1.5>1$，因此价格序列 P_t 呈**发散振荡**趋势（因特征根为负，价格在均衡价格 24 附近上下波动，且波动幅度越来越大）。

经济意义

初始价格 $P_0=30>24$（高于均衡价格），第 1 年价格 $P_1=6\times(-1.5)+24=15<24$（低于均衡价格），第 2 年 $P_2=6\times2.25+24=37.5>24$，第 3 年 $P_3=6\times(-3.375)+24=3.75<24$，波动幅度逐渐扩大。

原因：供给滞后导致“价格上涨→下年供给增加→价格下跌→下年供给减少→价格再上涨”的循环，且加速系数（供给对价格的敏感度）过大（3），导致市场不稳定。若要使价格收敛，需降低供给对价格的敏感度（如供给函数改为 $S_t=-20+1.5P_{t-1}$），使特征根绝对值 $|r|<1$。