主题名称	第一个重要极限	相关知识点	圆的面积、极限
所属课程	高等数学	授课时长	1 学时，45 分钟
授课对象	大一经济类专业	教学资源	多媒体
参考教材 章节位置	《高等数学及其应用》第二版 第 2 章　极限与连续 2.2 节　函数极限的性质及运算法则		

学情分析

本节课是高等数学中“函数极限”的内容，在此之前，学生已经学习过了函数极限的性质（如四则运算法则、迫敛性等），这些知识为本节课的学习做好了前期准备。

此外，本节课的内容不仅是求函数极限的重要方法，也是后续课程中比较无穷小量和研究正弦函数求导公式的基础，它在整个微积分学中占有十分重要的地位。

教学目标

知识技能目标

让学生了解公式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的证明过程，正确理解公式，知道公式应用的条件，熟练运用公式及其变形式解决有关函数极限的计算。

数学方法目标

培养学生质疑问题、解决问题的能力和相关知识的迁移能力。

情感态度目标

通过对这一重要极限公式的研究，进一步认识数学的美，激发学生的学习兴趣；养成细心观察、认真分析、善于总结的良好思维品质。

教学重点

正确理解公式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，并能运用公式及其变形式解决有关函数极限的计算。

教学难点

公式$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$的归纳、猜想、证明、及其广泛应用。

教学方法

本节课采用引导发现教学法、问题驱动法、讨论法以及讲练结合等教学方法。通过推导“半径为 r 的圆的面积公式”抽象出第一个重要极限。通过归纳猜想并配以函数取值列表和函数图象，强化学生对极限概念的理解和运算能力。在公式的引入上通过设疑引导学生尝试、讨论、猜想，并借助图像帮助学生归纳结论，锻炼学生运用数学工具解决数学问题的意识，提高学生的学习兴趣。

教学内容与过程（六个步骤）

一、创设情境，兴趣导入（4 分钟）

我国魏晋时期的数学家刘徽就提出了割圆术的思想，通过圆内接正多边形的面积来无限逼近圆的面积。从圆内接正六边形算起，成倍增加为正 12 边形、正 24 边形、正 48 边形。当 n 越大的时候，圆内接正 n 多边形的面积就越接近圆的面积。

为了导出半径为 R 的圆面积，我们作圆的内接正 n 边形，利用三角形和多边形的面积公式，容易计算出半径为 R 的圆内接正 n 边形的面积为 $S_n=n\cdot\frac{1}{2}r\cdot r\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$

当 n 无限增大的时候，S_n 无限接近于一个确定的常数，这个确定的常数理所当然的应该就是圆面积。

$$S_{圆}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\pi r^2\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\quad=\pi r^2\lim_{\frac{2\pi}{n}\to 0}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$$

转化成$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$，如何求极限呢？

【问题提出】能否利用之前学习的求极限方法来求呢？

首先我们来观察一下这个函数极限，它能否写成$\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}{\lim\limits_{x\to 0}x}=\frac{0}{0}$？

如果成立，那么会出现分母为 0 的情形。那么，问题出在哪儿呢？

【回忆】函数极限的四则运算法则：

若$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$.

本法则在使用时有一个重要的条件：就是 $\lim g(x)=B\neq 0.$

【内容总结】

通过函数极限的运算法则我们解决了部分函数的极限。对于 $\frac{0}{0}$ 型未定式的函数的极限和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的函数的极限解决方法，到目前为止，我们学过消去零因子，有理化分子或分母以及分子分母同除以最高次项的方法解得函数的极限。但以上方法也不适用求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

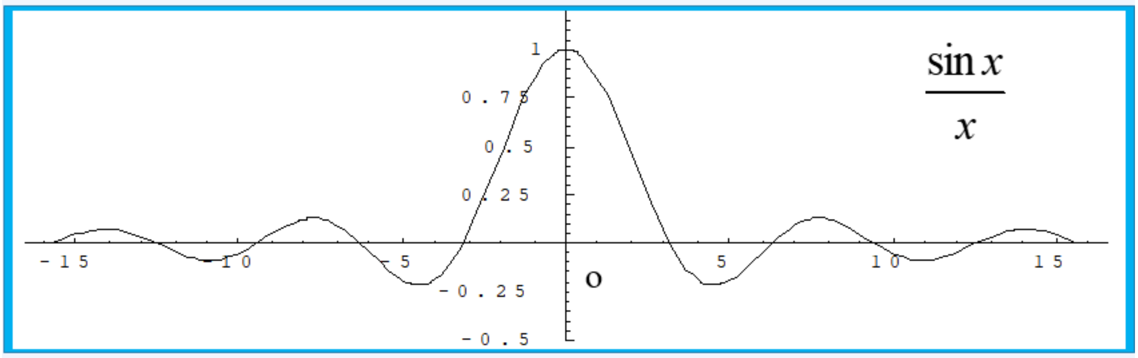
设计意图：

教师设疑，学生回答，师生互动，启发引导，总结点评。使学生对所学重要知识及求极限的方法与思路有更深的理解。设疑引入实例增强学生学习动力，由任务驱动，提出问题，学生在如何解决此类问题的疑问下引出——第一个重要极限：

二、几何分析，归纳方法（2 分钟）

观察动画演示及图表：

x	1	0.5	0.1	0.05	0.01	0.005
$\frac{\sin x}{x}$	0.84147	0.95885	0.99833	0.99958	0.99998	0.99999



不论是从表格，还是从图像，我们都能直观地感受到，函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 可能为 1.

设计意图：

利用取值变化表，让学生观察比值的变化趋势，并通过图像验证猜想。通过几何直观和观察研究，引导学生通过归纳猜想得出第一个重要极限的极限值，体会数形结合思想的作用。

【问题提出】那么如何证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ 呢？

三、数形结合，公式讲授（5 分钟）

证明：第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$：

我们需要研究当 x 趋于 0 时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 趋于多少，

即当 x 在原点附近时，对 $\dfrac{\sin x}{x}$ 进行估计，

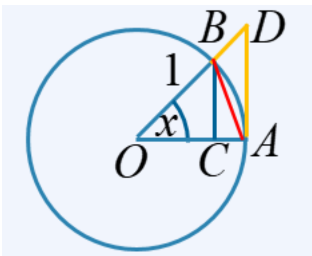
为此我们不妨设 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

先来研究 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，也就是我们熟悉的 x 为锐角的情况，

这时 $\sin x$ 和 x 是什么关系呢？

不难发现对于 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，有 $\sin x<x$，因此 $\dfrac{\sin x}{x}<1$.

（这样我们对 $\dfrac{\sin x}{x}$ 有了一个上界的估计，能不能再去估计 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的下界呢？）



事实上：由扇形 OAB 面积小于三角形 OAD 面积，可得：

$\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot x<\dfrac{1}{2}\cdot\tan x\cdot 1$,故 $x<\tan x$.

因此，当 $\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，有 $\sin x<x<\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，所以 $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$，

注意此不等式当 $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ 时也成立。而 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，根据夹逼准则，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

由此，我们想到了函数极限的迫敛性，当三个函数 f,g,h 满足 $f\le g\le h$，

且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$ 时，有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

这里由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$, $\lim\limits_{x\to 0}1$ 都是 1，　所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

设计意图：

讲授证明过程，学生理解识记，加深公式特征的记忆。

四、连续启发，层层推进（15 分钟）

1. 公式剖析

【问题提出】观察 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 使用特点

(1)公式中分子是正弦函数，且当 $x\to 0$ 过程中，分子分母的函数极限都是 0，即函数极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定型。

(2)公式中分子 sin 后面的角与分母必须相同。

2. 例题讲解

例 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

【分析】由 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，得 $\dfrac{\tan x}{x}=\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}$，再利用极限运算法则化为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

例 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

【分析】我们发现分子上的 $\sin 3x$ 要想转化为 $\sin x$ 的函数，有点困难，所以我们把 $3x$ 看成一个整体，令它为 u，那么当 x 趋于 0 时，有 u 也趋于 0，所以原式可以转化为 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin u}{u}\cdot 3$，进而，最后结果为 3.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3)\overset{u=3x}{=}3\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=3$.

【课堂练习】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$

例 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$　（将分母的次数再提高，函数变得更复杂）

【分析】分子上出现了 $1-\cos x$，它和 $\sin x$ 有什么联系呢？我们想到了倍角公式

$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$，所以，利用刚才的重要极限和四则运算法则，可得结果为$\frac{1}{2}$.

设计意图：

引导学生观察。寻找公式的本质与共性。通过学生思考观察，类比归纳，抽象概括抓住问题本质，这样既加深了公式记忆，又培养学生的观察能力，说明了公式的用途及使用条件。

五、拓展深化，强化训练（16 分钟）

例 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$ （引导学生变量代换）

【问题提出】该极限的形式与第一个重要极限有什么不同。通过观察分析发现第一个重要的极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$分子是$\sin x$，而本例题$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$分子是$\arcsin x$。

解：设$\arcsin x=u$，则$x=\sin u$，并代入原极限得$\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}$，而$\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x=\lim\limits_{u\to 0}u=0$，因而$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1$.

例 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}[\frac{\sin x}{x}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2\cdot\frac{1}{2\cos x}]=\frac{1}{2}.$$

【教师总结】只要$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}u=0$，则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\sin u}{u}=1$和$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{u}{\sin u}=1$.

在自变量的不同变化的过程中，分子$\sin$后面可以是一个函数$\varphi(x)$，但分母也必须是$\varphi(x)$，且$\varphi(x)$是无穷小量，即$\varphi(x)\to 0$。$\lim\limits_{x\text{某变化过程中}}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$

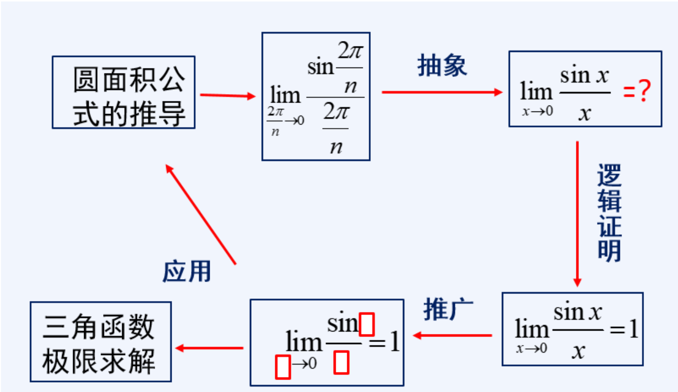
【练习】$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$；　$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}$

设计意图：

让学生体会第一个重要极限探讨的必要性，在教师的引导下尝试，体会换元法、转化思想在数学解题中的重要作用。例题由易到难，设置层次性，便于学生灵活使用

公式，提高解决实际问题的能力。使学生明白应用第一个重要极限的使用规则，培养学生举一反三的能力。

六、小结概念，总结方法（3 分钟）



根据夹逼准则证明重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ，然后重要极限采用恒等变换、变量替换等方法，把含三角函数的 $\frac{0}{0}$ 不定型的极限转化为该重要极限进行求解。其证明及应用，都体现了转化思想。

【课后作业】 课本 93 页 6(1)(2)(3)(7),　7

七、板书设计，条理清晰

1.重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

2.重要极限应用：求含三角函数 $\frac{0}{0}$ 型极限

(1)思想----转化为重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

(2)方法----恒等变换、变量替换—“凑”重要极限。

(3)步骤---变、凑、算。

教学总结

教师引导学生探究含三角函数的 $\frac{0}{0}$ 型的极限的求法。本节课是以设疑，问题驱动法作为教学切入点，以圆的面积公式这一熟悉的结论如何验证其正确性引起学生兴趣，有利于学生积极思考尽快参与教学活动，有利于教学目标的实现。

然后通过单位圆建立一重要不等式，借助夹逼准则，给出重要极限的证明。对于公式的证明，所涉及的内容比较多，逻辑性较强，在老师的引导下了解论证过程。在公式的运用上按照循序渐进的原则，设计梯度、降低难度，留出学生的思考空间，让

学生去尝试、联想、探索，培养其分析和解决问题的能力。

最后通过实例总结出求含三角函数的 $\frac{0}{0}$ 不定型的极限的思想方法和解题步骤。整个教学过程，都体现了转化的思想方法，从而培养学生利用转化的思想方法解决实际问题的能力和计算能力。让学生在主动探究问题，获得新知的过程中，培养科学猜想和探究问题的能力。