

主题名称	二元函数的连续性	相关知识点	二元函数的极限
所属课程	高等数学	授课时长	1 学时, 45 分钟
授课对象	大一经济类专业	教学资源	多媒体
参考教材 章节位置	《高等数学及其应用》第二版 第 8 章 多元函数微分学 8.2 节 二元函数的极限与连续		

学情分析

无论是单元微积分还是多元微积分, 其中所讨论的一类函数最重要的是连续函数。二元函数连续性的定义比一元函数连续性的定义更一般化了些。类比一元函数连续性, 我们知道连续的概念是建立在函数极限基础之上的。函数的连续性的定义得出充分利用了函数图像的直观性, 将图像中的直观感受以量化 (即极限方式) 加以刻画, 体现了数形结合的基本思想。在学习了函数极限定义以后, 以极限思想来刻画函数的连续性, 化未知为已知, 变新知为旧知, 既承上启下, 又顺理成章。本课时内容对于培养学生逻辑推理能力和探索精神以及创新意识具有重要意义。

学生通过前面极限内容的学习, 已经理解了函数极限概念的本质, 并掌握了极限的计算, 在此基础上建立的函数连续性的概念就容易接受和理解了。

教学目标

知识目标

- (1) 要求学生理解二元函数在一点处连续的两个定义形式;
- (2) 掌握函数在一点处连续性的判定方法。

能力目标

(1) 培养学生用数学的思维方式观察和分析实际生活中的问题, 进一步加深数学服务于生活更来源于生活的认识, 养成科学的思维习惯, 培养学生勇于探索的科学精神;

(2) 培养学生由直观到抽象的概括能力, 加强学生对数形结合、联想类比思想的认识。

情感态度目标

- (1) 揭示函数连续性实质的同时, 渗透客观世界中连续与不连续等辩证唯物主义

思想，通过师生之间课堂交流，教师引导学生发现数学问题，并解决该数学问题。体现学生相对独立“首创”得到新知识，又相互感染和学习，培养团队写作的精神。

(2)通过实际例子引入函数连续性，让学生感受到数学在哪里，美就在哪里。

教学重点

由于函数连续是建立在极限基础上，又是微积分的基础，加之微积分学主要研究连续函数（按段连续）。因此，函数的连续性概念是本节课的重点。具体地：

- (1) 理解二元函数连续性的概念和连续的条件；
- (2) 掌握判别二元函数连续性的方法。

教学难点

用定义判断二元函数在某一点处的连续性。

教学方法

(1) 本节以教师引导与学生自主探索相结合的方式，从滑沙者视频入手，以自然界中存在的连续变化的事物引入新课，引导学生用数学的语言准确地表述二元函数的连续性。从几何直观为分析出发点，将抽象的概念融于大量生动形象、具体的实例中有助于学生的理解、记忆，激发学生的学习兴趣。

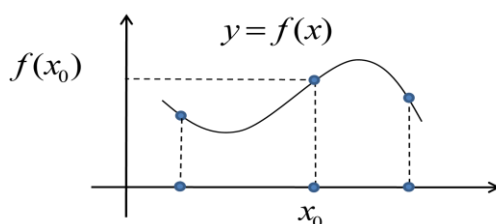
(2) 通过类比方法、归纳总结公式、多媒体课件形象展示、充分体现数形结合的优势，激发学生的学习兴趣，体验数学活动充满探索性和创造性。

教学内容与过程

一、创设情境，兴趣导入(2 分钟)

通过滑沙者视频和山脉、河流、西瓜、鸟巢的图片这些生动的实例引导学生注意到画面中曲面特点，显然有些曲面连续或不连续。那么什么东西是连续的呢？或者说，如何用精确地数学语言描述曲面的连续呢？这就是本节课要学习的内容。

对于连续，大家并不陌生。回顾一元函数连续的概念，结合动画演示：



【知识回顾】如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 且有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

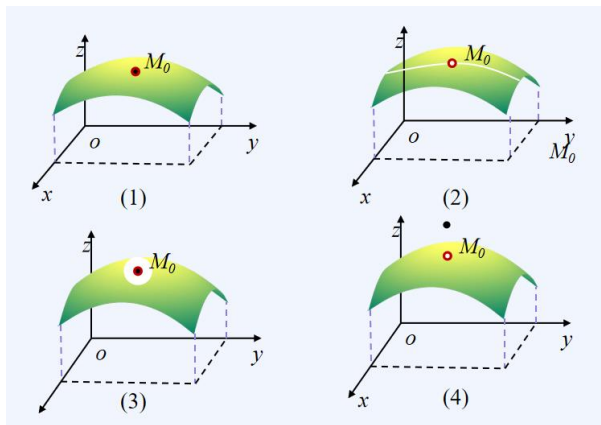
设计意图:

创设贴近生活的问题情境, 反映数学的应用价值, 结合形象思维与逻辑思维, 如观察生活中的实例分析连续的特点, 培养学生兴趣, 激发学习热情, 体会数学无处不在。

二、几何分析, 归纳特征 (3 分钟)

抽象上述变化过程的函数图像

将上述实物曲面抽象出, 放入空间直角坐标系中, 类比于一元函数连续性的研究思路, 进行讨论分析。



(1)图不连续, (2)(3)(4) 图不连续, 分析(2)(3)(4) 图不连续的原因, (2)图函数值不存在; (3)图函数值存在, 但极限值不存在; (4)图函数值存在, 极限值也存在, 但函数值不等于极限值, 将(2)(3)(4) 图不连续的原因放入(1)图中, 并没有出现在(1)图中。

设计意图:

通过几何直观和对比观察研究, 引导学生探索并归纳出二元函数曲面连续性的特征, 建构二元函数连续性的认知基础。从引出下面问题:

三、数形结合, 概念讲授 (10 分钟)

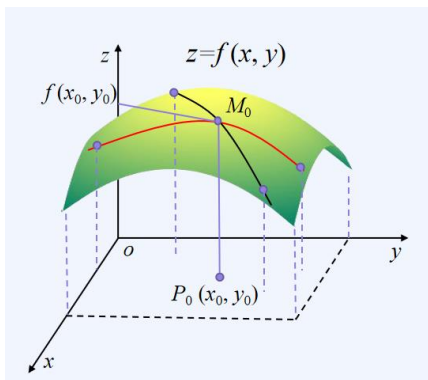
【问题提出】如何用准确的数学语言来描述二元函数的连续性呢?

【概念探索】对(1)图讨论分析如下:

i)分析上述函数图像之间的区别与联系, 抽象出上面图像(1)区别于后三者的本

质，实现以极限方式刻画二元函数（图像）连续的本质；

ii)通过动画演示，结合一元函数连续性的定义，具体得到：



1. 二元函数在一点处连续的定义

由此得出二元函数在一点处连续的精确定义。

定义 如果函数且有

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续。

【总结】 函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续必须满足一下三个条件：

- (1) $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义； (2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在；
- (3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

不满足上述三个条件中的任何一个，则称二元函数在该点不连续或称该点为函数的间断点。

2. 利用定义证明二元函数在一点处的连续性

例 1 讨论函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性。

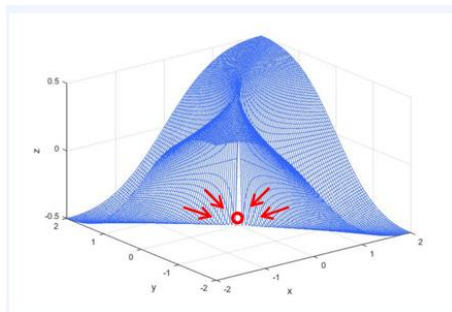
解 取 $y=kx$ ，

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

因为其值随 k 的不同而变化，由极限的唯一性，所以极限不存在，故函数在 $(0,0)$ 处不连续。

【求解思路】 引导学生利用二元函数连续性的定义证明上述结论。

通过观察图形（如下图所示），很直观地看到函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不连续



【思考】 请同学们总结验证函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续的步骤。

设计意图：

(1)通过对比观察分析，并结合曲面的连续特征归纳出函数连续性的定义，渗透数形结合思想。

(2)类比一元函数连续性的定义，给出二元函数连续性的定义，体会类比思想。

3. 定义的等价形式

【问题提出】 能否用函数的增量描述二元函数的连续性呢？

通过观察动画演示，得到二元函数在一点处连续的等价定义：

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \Delta z = 0$$

引导学生观察、发现、探索自变量的增量趋于零引起函数的增量变化的过程，推出函数在一点处连续的等价定义，通过几何直观，再次体会函数在一点处连续的过程，理解函数连续的本质。

【知识拓展】 介绍函数连续性的数学进程，其中最重要的代表人物柯西(Cauchy, 1789—1857)是法国数学家、物理学家、天文学家。展示数学家的穷追不舍、孜孜以求的探索真理的治学精神，激发学生的学习兴趣。

设计意图：

两种定义等价形式从不同角度刻画了二元函数连续的本质，启发学生多思多练，寻找使用这两个定义讨论问题时各自的方便之处。

四、连续启发，层层推进(10分钟)

【问题提出】能否由二元函数在一点处的连续性推广到二元函数在区间内（区间上）的连续性呢？

如果函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内每一点都连续，则称 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续。

例 2 证明例 1 中的函数在除点 $(0,0)$ 以外的平面区域内都是连续的。

【问题分析与教学方法】

对比观察函数在点 0 处及其它点处的极限，逐层发问，采用连续启发式教学进行推导，让学生自解其惑。

与一元连续函数的性质相类似，在某点连续的二元函数经过有限次的四则运算有限次复合运算后，生成新的二元函数在相应点仍然连续。

设计意图：

采用连续启发式分析问题，更有利于学生对连续性特征的掌握。层层推进的教学方式，使学生对数学知识的学习更具趣味性。

五、拓展深化，强化训练(17 分钟)

【练习】 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性。

【问题提出】 类比于有界闭区间上一元连续函数的重要性质，同学们能否给出有界闭区域上二元连续函数的性质？请同学们尝试给出。

最后教师总结，给出有界闭区域上连续的二元函数的性质：**最值定理、介值定理。**

设计意图：

通过类比一元函数闭区间上连续性，给出二元函数闭区域性质，训练和培养学生的逻辑思维能力，使学生寻找新旧知识之间的联系，从而能够更好地理解结论，并形成言之有理，论证有据，治学严谨的素养。

六、小结概念，总结方法(3 分钟)

1. 二元函数在一点处连续的定义；
2. 判定二元函数在一点处是否连续；
3. 二元函数在闭区域上的性质。

【思考】 (1)由一元函数与二元函数连续性定义，是否可推广到 n 元函数？

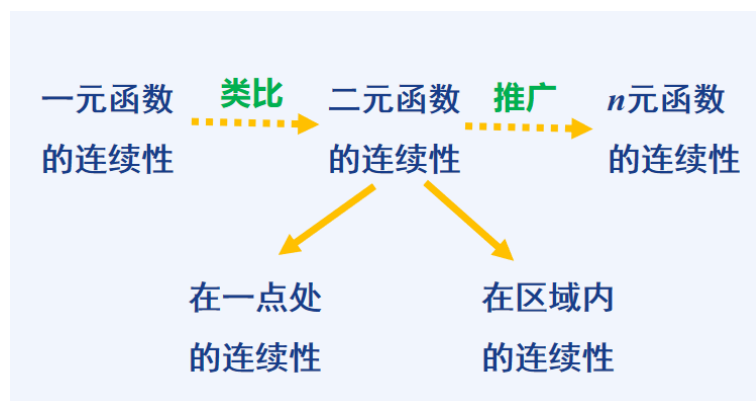
(2)从几何上看，连续二元函数图形特征是什么？

【课后作业】课本 342 页 2, 3

【下节预习任务】多元函数的偏导数

七、板书设计，条理清晰

力求条理清楚，便于学生从整体上认识、理解二元函数连续性的概念及其判别函数是否连续。



教学总结

1. 本节课以滑沙者视频和山脉、河流、西瓜、鸟巢等图片为切入点，用多媒体展示了现实生活中连续与不连续的几个实例，从客观世界存在的连续现象引导学生自主思考连续的数学含义。从连续函数的图形所表现出来的特点中抽象出二元函数在一点处连续的定义，通过逻辑推理和几何直观分析等多种手段，引导学生分析和构造函数连续的定义，这正是建构主义的处理方式。而且这种教学方式符合学生的认知规律，启发学生科研探索的精神。

2. 从学生的角度来呈现数学思想的建构过程，尽量采用符合同学们思维习惯的、易于接受的讲授方式，数形结合。这种方法减轻了学生负担，又强化理解了连续本质。

3. 极限动态思想的引入和一元函数连续性的回顾帮助学生把未知问题与旧有知识联系起来，有助于建立正确的逻辑思维习惯，并激发学生研究的热情。

4. 本课结束时回到开篇时滑沙视频，将其升华到人生道路的哲学意义，引导学生认识数学之美。