二、导数与微分典型经济应用案例

导数与微分作为刻画变量变化率及增量近似计算的核心数学工具，在经济管理领域的决策分析中具有不可替代的作用。从企业的产量优化、定价策略到市场的需求调节，都离不开导数对“边际量”的精准刻画和微分对“增量”的近似估算。

案例一：单一产品的利润最大化决策

问题背景

某智能手环生产企业通过成本核算与市场调研获得关键数据：总成本函数为 $C(Q)=0.02Q^2+5Q+800$（其中 Q 为产量，单位：只； $C(Q)$为总成本，单位：元）；市场需求函数为$P=25-0.03Q$（其中 P 为销售单价，单位：元/只）。为实现利润最大化目标，企业需确定最优产量及对应的最大利润，同时分析产量微小变动对利润的影响。

建模步骤

1. 明确核心经济关系：总利润（$L(Q)$）是总收益（$R(Q)$）与总成本（$C(Q)$）的差额，即 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$ ；

2. 推导总收益函数：总收益为单价与产量的乘积，结合需求函数可得

$$R(Q)=P*Q=Q(25-0.03Q)\ ;$$

3. 构建利润函数：将总收益函数与总成本函数代入利润公式，得到关于产量 Q 的一元二次函数；

4. 极值求解逻辑：根据导数性质，利润最大化的必要条件是边际利润（$L'(Q)$ ，即利润函数的导数）为 0，且二阶导数 $L''(Q)<0$ （确保极值为极大值）。

解答过程

1. 计算总收益函数：

$$R\left(Q\right)=P\times Q=Q\left(25-0.03Q\right)=25Q-0.03Q^2$$

2. 构建利润函数：

$$\begin{aligned}L\left(Q\right)&=R\left(Q\right)-C\left(Q\right)=\left(25Q-0.03Q^2\right)-\left(0.02Q^2+5Q+800\right)\\&=-0.05Q^2+20Q-800\end{aligned}$$

3. 求边际利润并确定极值点：对利润函数求一阶导数（边际利润）：

$$L'(Q)=\frac{dL}{dQ}=-0.1Q+20$$

令边际利润为 0，解最优产量：

$$-0.1Q+20=0 \text{ 得 } Q=200 \text{ ，}$$

4. 验证极值类型：对利润函数求二阶导数：

$$L''(Q)=\frac{d^2L}{dQ^2}=-0.1<0$$

二阶导数小于 0，说明 $Q=200$ 时利润函数取得极大值，即最优产量为 200 只。

5. 计算最大利润：将 $Q=200$ 代入利润函数：

$$L(200)=-0.05\times 200^2+20\times 200-800=1200$$

6. 边际利润的经济意义：当产量 $Q=200$ 时，边际利润 $L'(200)=0$，说明此时增加或减少一单位产量，利润基本不变；若 $Q<200$，则 $L'(Q)>0$，增加产量可提高利润；若 $Q>200$，则 $L'(Q)<0$，增加产量会导致利润下降。

经济意义

该企业的最优生产策略为生产 200 只智能手环，此时可实现最大利润 1200 元。边际利润的变化规律为企业提供了动态决策依据：在产量未达到 200 只时，应扩大生产规模以提升利润；超过 200 只后，需控制产量或通过技术升级降低成本，避免利润下滑。此案例印证了“边际收益等于边际成本时利润最大”的经济学规律（边际收益 $R'(Q)=25-0.06Q$，边际成本 $C'(Q)=0.04Q+5$，当 Q=200 时两者相等）。

案例二：多产品生产的成本最小化优化

问题背景

某食品加工厂同时生产 A、B 两种零食，其联合总成本函数为 $C(x,y)=0.1x^2+0.05y^2+0.02xy+2x+3y+100$（其中 x 为 A 产品产量，单位：千克；y 为 B 产品产量，单位：千克；$C(x,y)$为联合总成本，单位：元）。根据市场订单要求，两种产品的总产量需满足 $x+2y=100$。企业需在满足订单要求的前提下，确定 A、B 两种产品的产量组合，使联合总成本最低。

建模步骤

1. 明确问题本质：这是一个带约束条件的多元函数极值问题，目标函数为联

合总成本函数 $C(x, y)$ ，约束条件为产量限制 $x + 2y = 100$；

2. 转化目标函数：利用约束条件消去一个变量（如将 $x = 100 - 2y$ 代入总成本函数），将二元函数转化为一元函数；

3. 极值求解逻辑：对转化后的一元成本函数求一阶导数，令其为 0 得到极值点，再通过二阶导数验证极值类型，确定成本最小值对应的产量组合。

解答过程

1. 根据约束条件转化变量：由 $x + 2y = 100$ 得 $x = 100 - 2y$ ，且 $x > 0, y > 0$，故 $0 < y < 50$ ；

2. 构建一元成本函数：将 $x = 100 - 2y$ 代入联合总成本函数：

$$C(y) = 0.1(100 - 2y)^2 + 0.05y^2 + 0.02(100 - 2y)y + 2(100 - 2y) + 3y + 100$$

整理：

$$C(y) = 0.39y^2 - 35y + 1300$$

3. 求一阶导数并确定极值点：

$$C'(y) = \frac{dC}{dy} = 0.78y - 35$$

令 $C'(y) = 0$ ，解得： $y \approx 44.87 \approx 45$ （千克）。

4. 验证极值类型：二阶导数 $C''(y) = 0.78 > 0$，说明该极值为极小值，即成本最小值点。

5. 确定 A 产品产量：$x = 100 - 2y \approx 100 - 2\times 45 = 10$（千克）

6. 计算最小总成本：将 x=10 、 y=45 代入联合总成本函数：

$C(10,45) = 0.1\times 10^2 + 0.05\times 45^2 + 0.02\times 10\times 45 + 2\times 10 + 3\times 45\times 100 = 366.25$ （元）。

经济意义

在满足总产量约束的前提下，生产 A 产品 10 千克、B 产品 45 千克时，企业联合总成本最低，约为 366.25 元。该案例中，偏导数的应用解决了多产品生产的资源分配问题，通过将约束优化问题转化为单变量极值问题，为企业制定高效的生产组合策略提供了量化依据。若订单总量发生微小变动，可通过微分近似计算成本的变化幅度，进一步提升决策的灵活性。

案例三：商品需求价格弹性与定价策略

问题背景

某服装品牌的市场调研显示，其新款夹克的需求函数为 $Q = 800\text{-}4P$ （其中 Q 为需求量，单位：件； P 为销售单价，单位：元/件）。企业当前定价为 120 元/件，为提升销售额或总收益，需分析该价格下的需求价格弹性（衡量价格变动对需求量的影响程度），并判断提价或降价策略是否可行。

建模步骤

1. 明确弹性定义：需求价格弹性（E_d ）是需求量变动率与价格变动率的比值，公式为 $E_d = \dfrac{\Delta Q / Q}{\Delta P / P}$；当价格变动微小时，可用导数表示为 $E_d = \dfrac{P}{Q} \cdot \dfrac{dQ}{dP}$（点弹性公式）；

2. 计算关键参数：根据当前定价计算对应的需求量，对需求函数求导得到 $\dfrac{dQ}{dP}$；

3. 弹性分析逻辑：若 $|E_d| > 1$（富有弹性），价格与总收益反向变动，降价可提升总收益；若 $|E_d| < 1$（缺乏弹性），价格与总收益同向变动，提价可提升总收益；若 $|E_d| = 1$（单位弹性），总收益达到最大。

解答过程

1. 计算当前定价下的需求量：当 $P = 120$ 元时，代入需求函数：

$$Q = 800 - 4 \times 120 = 320 \quad （件）$$

2. 对需求函数求导（需求量对价格的变化率）：

$$\frac{dQ}{dP} = -4$$

负号表示价格与需求量呈反向变动，符合需求定律。

3. 计算需求价格弹性（点弹性）：

$$E_d = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} = \frac{120}{320} \times (-4) = -1.5$$

弹性值取绝对值 $|E_d| = 1.5 > 1$，说明该夹克在 120 元价格水平下富有弹性。

4. 总收益分析：当前总收益 $R = P \times Q = 120 \times 320 = 38400$ 元；

若降价 10%至 108 元，需求量变动率为 $E_d \times (-10\%) = 15\%$，需求量增至

$320 \times (1+15\%) = 368$件，总收益变为$108 \times 368 = 39744$元，较之前增加 1344 元；

若提价 10%至 132 元，需求量降至$320 \times (1-15\%) = 272$ 件，总收益变为$132 \times 272 = 35904$元，较之前减少 2496 元。

经济意义

该新款夹克在 120 元价格水平下富有弹性，价格变动对需求量的影响较大，因此企业应采取降价策略以提升总收益。需求价格弹性通过导数将"价格-需求量"的关系转化为可量化的弹性指标，为企业定价策略制定提供了核心依据，避免了盲目调价带来的收益损失。此外，通过弹性分析还可预判不同价格区间的市场反应，助力制定阶梯定价或促销策略。

案例四：边际成本与产量决策

问题背景

某机械加工厂生产某型号零件的总成本函数为

$$C(Q) = 0.002Q^3 + 0.1Q^2 + 10Q + 500,$$

其中 Q 为产量，单位：个； $C(Q)$ 为总成本，单位：元。当产量为 100 个时，企业需计算此时的边际成本（增加一个单位产量带来的成本增量），并利用微分近似估算产量从 100 个增加到 102 个时的总成本增量，为短期生产决策提供参考。

建模步骤

1. 明确边际成本定义：边际成本（ MC ）是总成本对产量的导数，即 $MC = C'(Q)$，表示产量为 Q 时，每增加一单位产量的成本增量；

2. 微分近似原理：当产量发生微小变动 ΔQ 时，总成本的增量 $\Delta C \approx dC = C'(Q) \cdot \Delta Q$（微分的几何意义为切线增量近似曲线增量）；

3. 计算逻辑：先求总成本函数的导数得到边际成本函数，代入当前产量计算边际成本；再利用微分公式近似计算产量变动后的成本增量。

解答过程

1. 求边际成本函数（总成本函数的一阶导数）：

$$MC = C'(Q) = \frac{dC}{dQ} = 0.006Q^2 + 0.2Q + 10,$$

2. 计算产量为 100 个时的边际成本：

$$MC(100)=0.006\times100^2+0.2\times100+10=90 \quad （元/个），$$

3. 用微分近似计算产量从 100 个增至 102 个的总成本增量：

产量变动量 $\Delta Q=102-100=2$，当 $Q=100$ 时，$C'(100)=90$，则：

$$\Delta C\approx \mathrm{d}\,C=C'(Q)\cdot\Delta Q=90\times2=180 \quad （元），$$

4. 计算实际成本增量（验证近似效果）：

$$C(102)=0.002\times102^3+0.1\times102^2+10\times102+500=4682.008 \quad （元），$$

$$C(100)=0.002\times100^3+0.1\times100^2+10\times100+500=4500 （元），$$

实际

$$\Delta C=C(102)-C(11)=4682.008-4500=182.008 \quad （元），$$

微分近似值与实际值误差仅 2.008 元，近似效果良好。

经济意义

当产量为 100 个时，每多生产一个零件的边际成本为 90 元，该指标直接反映了短期生产的增量成本水平。若零件的边际收益（每多卖一个的收益）高于 90 元，扩大生产可提升利润；反之则应减少产量。通过微分近似计算，企业可快速估算产量微小变动带来的成本变化，无需重复计算复杂的总成本函数，大幅提升了短期生产决策的效率，尤其适用于产量微调的场景。