价格与库存模型

若某商品的供给函数和需求函数分别为

$$S = a(P - \alpha),\ D = -b(P - \alpha)\ （a,b\text{为正常数}）\quad (1)$$

- 而该商品在第t个时期的价格与库存量分别为P_t与L_t，且假设商品的合理库存量为$\overline{L}$．

一般情况下，如果商品的库存量超过其合理库存，则该商品的价格就下跌，如果商品的库存量低于其合理库存，则该商品的价格就上涨，因此 P_t 与 L_t满足如下方程

$$P_{t+1} - P_t = c(\overline{L} - L_t)\quad （c\text{为比例常数}）\qquad (2)$$

将上式中的 t 换为 $t+1$ 得

$$P_{t+2}-P_{t+1}=c(\overline{L}-L_{t+1}) \qquad (3)$$

将(3)减去(2)得

$$P_{t+2}-2P_{t+1}+P_{t}=-c(L_{t+1}-L_{t}) \qquad (4)$$

假设库存量 L_t 的改变与商品销售状态有关，且在第

$t+1$ 时段商品的库存增加量等于该时段的供求量之差，即

$$L_{t+1}-L_{t}=S_{t+1}-D_{t+1}$$

将(1)式代入可得 $L_{t+1}-L_{t}=(a+b)P_{t+1}-a\alpha-b\alpha$

将上式代入方程(4)得

$$P_{t+2}+[c(a+b)-2]P_{t+1}+P_t=(a+b)\alpha \qquad (5)$$

此方程为二阶常系数线性差分方程.

容易求得(5)的特解为 $P_t^*=\alpha$.

(5)对应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+[c(a+b)-2]\lambda+1=0 \qquad (6)$$

解得

$$\lambda_{1,2}=-r\pm\sqrt{r^2-1},\ r=\frac{1}{2}[c(a+b)-2].$$

(1) 若 $|r|<1$，不妨设 $r=\cos\theta$，则方程(5)的通解为

$$P_t = B_1\cos n\theta + B_2\sin n\theta + \alpha$$

(2) 若 $|r|>1$，则方程(5)的通解为

$$P_t = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n + \alpha$$

由于$\lambda_2 = -r-\sqrt{r^2-1} < -r < -1$，则当 $t\to+\infty$ 时，λ_2^n

将迅速变化，此时方程无稳定解.

结论： 综上可知，当 $-1<r<1$，即 $0<c<\dfrac{4}{a+b}$ 时，该商品的价格 P_t 相对比较稳定.