

讨论题 7：最大利润问题

以下为你提供两个参考答案，一个侧重于微观经济学的边际理论，另一个侧重于数学模型的多因素考量，并附带了课堂引导建议。

参考答案一：边际成本与边际收入的动态平衡——为什么不是“越多越好”？

讨论切入点：

很多学生会有朴素的想法：东西卖得越贵，赚得就越多；或者生产得越多，赚得就越多。我们可以用生活中的例子来反驳：为什么夏天的西瓜刚上市时很贵，但大家抢着买；到了旺季西瓜便宜得像水，但瓜农依然在卖？为什么苹果手机降价促销，但某些奢侈品宁愿销毁也不打折？

最大利润问题的数学解读：

1. 定义核心概念

设总利润为 $L(x)$ ，总收益为 $R(x)$ ，总成本为 $C(x)$ ，则有 $L(x) = R(x) - C(x)$ 。

利润最大化的必要条件是边际利润为 0，即 $L'(x) = 0$ ，也就是：

$$R'(x) = C'(x)$$

这个公式 $R'(x) = C'(x)$ 就是经济学中著名的**边际收益等于边际成本原则**。

2. 几何与生活的对应

○ 为什么产量不是越多越好？

当产量较低时，多生产一个单位产品带来的收益（边际收益 $R'(x)$ ）通常大于多生产它耗费的成本（边际成本 $C'(x)$ ），此时增产可以增加利润。

但当产量超过某个点后，由于市场饱和（需降价才能卖出更多）或生产压力（设备磨损、加班费增加），边际收益会下降，边际成本会上升。

当 $R'(x) < C'(x)$ 时，每多生产一个单位，实际上是在**亏钱**。因此，利润最大化的点一定停在两者相等的时刻。

○ 为什么不是价格越贵越好？

价格提高虽然看似单位利润高，但销量必然下降。总利润 L 不是单价的线性函数，它必须考虑需求对价格的弹性。最优价格正好使得因提价带来的收入增加等于因销量减少带来的收入损失。

3. 极值点的判定

导数等于 0 只是“停车点”。我们还需要二阶导数 $L''(x) < 0$ 来确认这是极大值。这意味着边际利润的变化率是负的，即随着产量增加，增加单位产量带来的利润增量是递减的——这符合经济学中的**边际报酬递减规律**。

课堂引导语：

“想象你在开一家奶茶店。你可能会想，我多进点原料，多雇个人，多做出几杯，总能多赚点吧？但现实是，做多了可能卖不掉倒掉，或者为了卖掉必须降价导致亏本。最大利润问题用数学告诉你一个朴素的经济学真理：**‘度’很重要。当最后一杯奶茶带来的收入，恰好等于它耗费的成本时，你的店就处于最佳状态。这就是数学对‘恰到好处’的精确刻画。**”

参考答案二：库存成本与销售速度的博弈——基于时间的利润流

讨论切入点：

很多商品的利润问题不是一次性的，而是随时间变化的。比如农民种水果，或者电影院的排片。水果熟了必须尽快卖掉，但卖得太快，可能价格被压得很低；慢慢卖，虽然单价可能稳

住，但会有腐烂损耗。什么时候是清仓的最佳时机？

最大利润问题的数学解读：

1. 引入时间变量

假设利润不仅是产量的函数，还是时间 t 的函数。或者考虑一个更经典的库存管理模型：

设某商品在销售过程中的库存量为 $Q(t)$ ，持有成本（仓储、保鲜、资金占用）与库存量成正比。商家需要决定进货批量或销售速度。

2. 总利润函数的构建

假设总利润 = 销售收入 - 进货成本 - 库存成本。

其中，库存成本往往与时间积分有关，例如 $\int_0^T h \cdot Q(t) dt$ (h 为单位时间单位库存的持有成本)。

决策变量可能是订货周期 T 或每次订货量 Q 。

3. 极限思想的渗透

通过求导（对 T 或 Q ）并令导数为 0，可以得到著名的经济订货量公式（EOQ 公式）：

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

其中 D 是年需求量， S 是每次订货的固定成本， H 是单位年持有成本。

这个公式生动地体现了极值思想：如果订货量太小，订货次数太多，固定成本 S 就高；如果订货量太大，仓库堆满货，持有成本 H 就高。最佳订货量恰好是让总成本最小的平衡点。

4. 动态视角的深化

有些问题更复杂，比如新产品上市，初期利润高，但随着时间推移，竞争对手出现，价格下跌，或者产品老化。此时利润函数 $L(t)$ 可能是先增后减的。我们需要找到 $L'(t) = 0$ 的时刻，即最佳停产或转产时机。

这种思想在股票投资中也有体现：什么时候止盈？数学上就是寻找收益曲线斜率为 0 的拐点，在边际收益开始下降前离场。

课堂引导语：

“大家去超市买牛奶，有没有发现不同品牌保质期不一样，促销策略也不一样？对于快过期的牛奶，超市为什么要‘亏本’卖？因为在时间这个变量下，库存成本（过期倒掉）已经超过了降价销售的损失。最大利润问题教给我们的，不仅是找一个‘最高点’，更是教我们在时间的长河中，如何平衡眼前的收益和未来的成本。”

给老师的总结升华建议

在学生们讨论完这些例子后，你可以帮他们提炼出求解最大利润问题的核心数学思想，而不仅仅是解题步骤：

1. 边际思想：

导数就是边际。利润最大化的点，是“增量”贡献为 0 的点。这一点告诉我们，不是所有的增长都是好事，当增量贡献开始为负时，就该停止了。

2. 平衡思想：

极值往往出现在两个矛盾趋势的平衡点（如收入与成本、库存与订货费）。数学给了我们寻找这种微妙平衡的工具。

3. 局部与整体：

导数为 0 是**局部**性质（在该点附近变化平缓），而最大值是**整体**性质。我们需要结合导数和边界条件（如产量不能为负、库存不能无限大）来确定真正的全局最大利润。

可拓展的课堂提问：

- 如果成本函数是线性的，收益函数是二次的（开口向下），那么利润函数是什么形状？为什么现实中的利润函数常常是开口向下的抛物线？
- 如果考虑税收或补贴（改变成本函数），最优产量会如何移动？这能用导数符号分析出来吗？