主题名称	一阶线性微分方程	相关知识点	可分离变量微分方程
所属课程	高等数学	授课时长	1 学时，45 分钟
授课对象	大一经济类专业	教学资源	多媒体
参考教材 章节位置	《高等数学及其应用》第二版 第 11 章 微分方程 11.2 节 一阶线性微分方程		

学情分析

本节课是学生熟练掌握了可分离变量方程的解法之后的继续，介绍一阶非齐次线性微分方程的解法——常数变易法，最后给出线性方程解的结构，为后续课程的学习奠定基础。

教学目标

(1)了解一阶线性微分方程形式；

(2)熟练掌握求一阶非齐次线性微分方程解的常数变易法。

教学重点

一阶线性非齐次微分方程的求解。

教学难点

常数变易法。

教学方法

采用引导发现、启发式，变教授为导学，让学生学会思考和学习。为了更好的培养学生的自主学习能力，尽可能的调动学生学习的主动性和积极性，提高学生的综合素质，给学生提供广阔的探索空间，提供充分展示创新、创造的机会。

教学内容与过程

一、创设情境，兴趣导入（3 分钟）

同学们，请先看一个跳伞运动员下降的运动例子。

引例 1　跳伞运动员下降的运动规律

设降落伞从跳伞塔下降后，所受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开跳伞塔

时 t=0 速度为零。求降落伞下落速度与时间的函数关系。

【分析】解： 设降落伞下降速度为 $v(t)$，由牛顿第二定律 $F=ma$，得 $m\frac{dv}{dt}=mg-kv$

$\therefore \frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g$

【问题提出】 如何求解以上这个微分方程呢？可否用前面学习的分离变量法？

显然不行，这就需要我们寻求更加有效的办法。这就是我们今天要学习的一阶线性微分方程。

设计意图：

创设贴近生活的问题情境，反映数学的应用价值，结合形象思维与逻辑思维，如观察生活中的实例建立数学模型，培养学生兴趣，体会数学无处不在。

二、问题驱动，概念讲授（4 分钟）

定义　一阶线性微分方程的形式是

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x) \qquad (1)$$

$Q(x)$ 称为“自由项”。如果 $Q(x)=0$，即

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \qquad (2)$$

称为一阶线性微分齐次方程。如果 $Q(x)$ 不恒为零， 则称(1)为一阶线性非齐次微分方程。

注： 线性是指关于未知函数 y 和它的导数是线性的。

设计意图：

同学们注意判别一阶线性齐次或非齐次微分方程。

三、连续启发，层层推进（5 分钟）

方程求解

1. $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$　　　　(2)——可分离变量方程

当 $y \neq 0$ 时，$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\int P(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|y| = -\int P(x)\mathrm{d}x + \ln|C|$，

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \quad (C \neq 0).$$

当 $y=0$ 时满足方程，故通解为 $y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ （C 为任意常数)。

2. $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 　　　(1)

【问题提出】如何求解一阶线性非齐次微分方程呢？

观察方程(1)、(2)发现，这两个方程是既有联系又有区别。两式左端是一样的，而右端是不一样的。因此猜想这两个方程的解也应该有一定的联系和区别。并且，还想利用齐次方程(2)的通解去求非齐次方程(1)的通解。

显然，齐次方程(2)的通解不是非齐次方程(1)的通解。要使(1)式恒等，(1)式左边必须要多出一项x的函数与右边的$Q(x)$相对应。

根据函数乘积的求导公式和齐次方程(2)的通解的特点，若把齐次方程(2)的通解变换成：两个函数的乘积，则有可能多出一项。最简单的变换就是把C变换成函数$C(x)$. 设通解为 $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}, C(x)$为待定系数

代入(1)得：$\left[C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\right]' + P(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$.

$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x) \Rightarrow C'(x) = Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x} \Rightarrow C(x) = \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C$.

(1)的通解为 $y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$.

【教师总结】求解过程中注意：用公式法求解一阶线性微分方程，关键找 $P(x), Q(x)$，其次是代入公式。

【问题提出】一阶线性非齐次方程的通解具有什么结构？

【教师总结】一阶线性非齐次方程(1)的通解，等于它所对应的齐次方程(2)的通解与非齐次方程(1)的一个特解之和。

设计意图：

用连续启发式分析问题，更有利于学生对该通解公式的掌握。层层推进的教学方式，使学生对数学知识的学习更具趣味性。

四、拓展深化，强化训练（30 分钟）

例 1 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+x^2.$$

解：显然，这是一个一阶线性非齐次方程。利用常数变易法，先求对应齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

的通解为 $y=Cx$.由常数变易法，令 $y=C(x)x$ 为原方程的解，代入原方程有

$$C'(x)x+C(x)=C(x)+x^2,$$

即 $C'(x)=x$，积分得 $C(x)=\frac{1}{2}x^2+C$，得原方程的通解为 $y=\frac{1}{2}x^3+Cx$.

一般在求解具体方程时，记忆通解公式，进行求解。

另外一种写法：由 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+x^2$ 得 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x^2$，　$P(x)=-\frac{1}{x}$, $Q(x)=x^2$ 直接代入公式

得，$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=e^{-\int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int x^2\mathrm{e}^{\int -\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=e^{\ln x}\left(\int x^2\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x+C\right)$

$=x\left(\frac{x^2}{2}+C\right)=\frac{x^3}{2}+C$

回看引例　跳伞运动员下降的运动规律

设降落伞从跳伞塔下降后，所受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开跳伞塔时 t=0 速度为零。求降落伞下落速度与时间的函数关系。

解：设降落伞下降速度为 $v(t)$，由牛顿第二定律 $F=ma$，得 $m\frac{dv}{dt}=mg-kv$

$$\therefore \frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g$$

$$v(t)=e^{-\int\frac{k}{m}dt}\left[\int ge^{\int\frac{k}{m}dt}+C\right]$$

$$=e^{-\frac{k}{m}t}\left(g\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t}+C\right)==\frac{mg}{k}+ce^{-\frac{k}{m}t}$$

【课堂练习】

(1)求解 $x\frac{dy}{dx}-3y=x^2$ 的通解。

(2)求解$(x-2)\dfrac{dy}{dx}=y+2(x-2)^2$的通解。

(3)求解$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{3}{2}}$的通解。

(4)求解$y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}$的通解。

求解思路：(1) 常数变易法；　　(2)套用通解公式。

设计意图：

通过练习题可以检测学生对知识的掌握情况，找到差距，更进一步巩固和深化新知识，让学生知道数学重在应用。

五、 小结概念，总结方法（3 分钟）

1.一阶线性微分方程的定义。

2. 常数变易法。

【课后作业】 课本 559 页，4

六、板书设计，条理清晰

1.一阶线性齐次微分方程：$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$通解为：$y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

2. 一阶线性非齐次微分方程：$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$通解为：

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

线性方程解的结构：非齐次线性方程通解=非齐次线性方程特解+齐次线性方程通解。

教学总结

一阶线性微分方程是一类非常重要的微分方程，具有完整的理论基础和丰富的实际背景。在可分离变量方程解法熟练的基础上，引导学生由齐次线性方程推导出非齐次线性方程的通解公式，给学生留下深刻印象。在时间允许的前提下，增加课堂练习，巩固强化利用公式法求解。