

<b>主题名称</b>	导数的应用——极值	<b>相关知识点</b>	导数、单调性
<b>所属课程</b>	高等数学	<b>授课时长</b>	1 学时，45 分钟
<b>授课对象</b>	大一经济类专业	<b>教学资源</b>	多媒体
<b>参考教材 章节位置</b>	《高等数学及其应用》第二版 第 4 章 中值定理与导数的应用 4.4 节 函数的单调性与极值		
<b>学情分析</b>			
<p>通过学习利用导数判断函数的单调性，学生已经了解了导数在函数中的初步应用，但还不够深入，对函数图形的整体刻画还不够完整。因为在此前的学习中，知识点主要以一次函数、二次函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数为载体，这些函数大多都是单调函数。只有二次函数、正弦函数、余弦函数不是单调的，通过中学的学习，同学们知道这三类函数是存在最值的，但是不清楚极值的概念。本节课的极值也是通过导数给出的定义，需要引导同学们深刻理解极值的概念，注意辩证与最值的区别。</p> <p>为了培养学生运用导数的基本思想去分析和解决实际问题的能力，体会导数这一工具的作用，本节课将进一步学习极值的理论。部分学生数学基础较差，用数学思想分析问题解决问题能力较弱，不宜选取较复杂的案例做研究的对象，因此我们引入了运动员跳水这一实际案例，进行分析和求解。通过生活案例的剖析，激发学生学习数学的积极性，鼓励学生的探索精神，提高学生应用数学思想解决实际问题的能力。</p>			
<b>教学目标</b>			
<b>知识目标</b>			
<ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 理解函数极值的概念，会通过函数图像直观感知函数的极值与导数的关系；</li> <li>(2) 掌握利用导数求函数极值的一般方法，会用导数求函数的极大值与极小值；</li> <li>(3) 了解可导函数在某点取得极值的必要条件和充分条件。</li> </ol>			
<b>能力目标</b>			
培养学生用数学思想解决生活中实际问题的能力，提高学生用数学思想分析问题和解决问题的能力。			
<b>情感态度目标</b>			

- (1) 通过观察函数图像特征得出结论，培养学生细心观察的良好学习习惯；
- (2) 通过对函数极值的研究提高学生分析问题、解决问题的能力；
- (3) 通过学习，培养学生思维的开放性、有效性、严密性，让学生体会极值是函数的局部性质，增强学生数形结合的思维意识。让学生感受到数学与生活的密切联系，体会学习数学对生活的意义。体验数学应用广泛性，培养学生学好数学的信念。

### 教学重点

- (1)发现实际问题中的函数关系，建立数学模型；
- (2)理解极值的概念，能够利用导数求函数极值。

### 教学难点

把生活中的实际问题转化为数学问题，建立数学模型,理解函数在某点取得极值的充分必要条件。

### 教学方法

- (1)通过实际问题的提出，建立数学模型，通过已有知识解决问题，并提出新的问题，充分调动学生的积极性；
- (2)复习单调性的基本知识，通过教师点拨，启发学生通过主动观察、主动思考、自主探究去发现和接受新知识，引出极值的概念与取得的条件；
- (3)教学中注重培养学生自主学习能力，采用“合作、讨论法”，让学生共同探讨、合作学习、取长补短、形成共识。

### 教学内容与过程

#### 一、创设情境，兴趣导入（3 分钟）

同学们，高台跳水运动中，运动员相对于水面的高度  $h$  (单位：m)与起跳后的时间  $t$  (单位：s) 存在函数关系为  $h(t) = -5t^2 + 5t + 10$ 。此函数是二次函数，当  $t = \frac{1}{2}$  时，运动员距水面的高度最大。

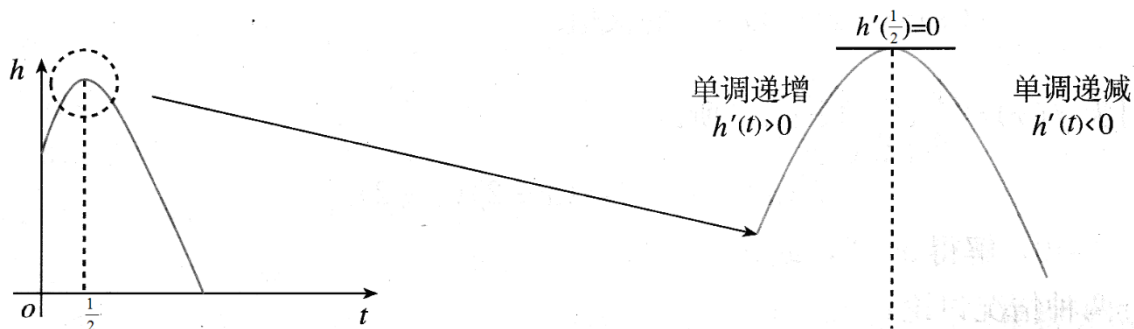
- 问：(1)函数  $h(t)$  在此点处的导数值为多少？
- (2)此点附近区域内的图像有什么特点？

(3)导数的符号有什么变化规律？

**【分析】** (1) 函数  $h(t)$  在此点处的导数值为 0；

(2) 此点左边是增函数，右边是减函数；

(3) 随着时间  $t$  的增加，导数的符号先是正，后是负。



### 设计意图：

创设贴近生活的问题情境，用高台跳水的例子，与已经学习的单调性相呼应，反映数学的应用价值，激发学习热情，学习兴趣，体会数学无处不在。

**【问题提出】** 高台跳水的例子中， $t = \frac{1}{2}$  处的导数等于 0，这一点左右两侧的导数一

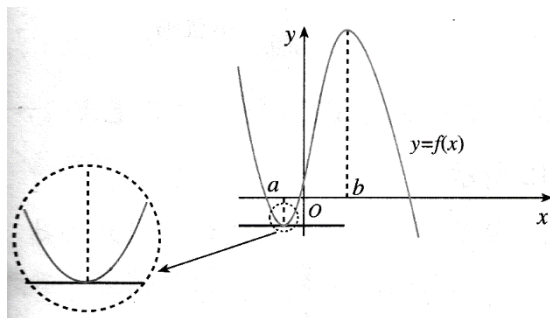
正一负。对于一般的函数  $y = f(x)$ ，是否也有同样的性质？

### 设计意图：

在教师的引导下，提高同学们观察问题，发现问题，解决问题的能力。从理论应用于实践，又从实践回归到理论，让同学们感受到数学知识的应用价值。

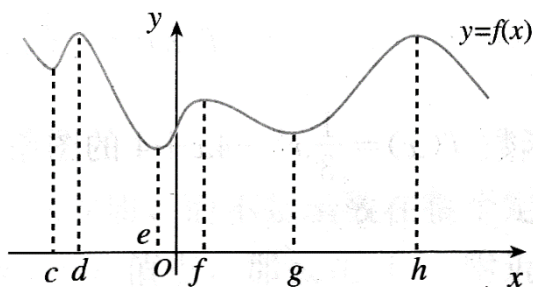
## 二、数形结合，探求新知（5 分钟）

**【问题提出】** 函数  $y = f(x)$  在点  $a$ 、 $b$  处的函数值与它附近区域内的点对应的函数值之间的大小关系？在点  $a$ 、 $b$  点处的导数值为多少？它附近区域导数的符号有什么变化规律？点  $a$  对应的函数值是最小值吗？点  $b$  对应的函数值是最大值吗？



**【分析】** 函数  $y = f(x)$  在点  $a$  的函数值比它周围邻域内的其他点对应的函数值都小，而点  $b$  处的函数值比它周围邻域内对应的函数值都大； $a$ ， $b$  两点对应的导数值都为 0；点  $a$  处的导数值左负右正，点  $b$  处的导数值左正右负；点  $a$  对应的函数值不是最小值，点  $b$  对应的函数值不是最大值。

**【问题提出】** 下图中，那些点与上图中的点  $a$  特征相同？哪些点与上图中的点  $b$  特征相同？



**【极值定义】** 设函数在点  $x_0$  的某个邻域内有定义，如果对该邻域内所有  $x$ ，有  $f(x) \leq f(x_0)$ ，则称  $f(x_0)$  为函数  $y = f(x)$  的一个极大值，称点  $x_0$  为  $y = f(x)$  的一个极大值点；如果对该邻域内所有  $x$ ，有  $f(x) \geq f(x_0)$ ，则称  $f(x_0)$  为函数  $y = f(x)$  的一个极小值，称点  $x_0$  为  $y = f(x)$  的一个极小值点。

- 【注意】**
- (1) 极大值点与极小值点统称为极值点，极大值与极小值统称为极值；
  - (2) 极值是局部的概念，极值可以有多个；
  - (3) 极值一定不在端点处取得。

### 设计意图：

用两个问题使学生经历直观感知、观察发现、归纳类比的思维过程，理解从特殊到一般的数学思想和归纳的数学方法。两种情况分析一种，另一种鼓励学生用类比的方法自己归纳，通过思考与讨论，知道极值刻画的是函数的局部性质，进一步理解极值点和极值的含义。通过层层提问，培养学生分析问题，概括归纳的能力，进而总结出极值的定义，归纳出极值相关的特点。

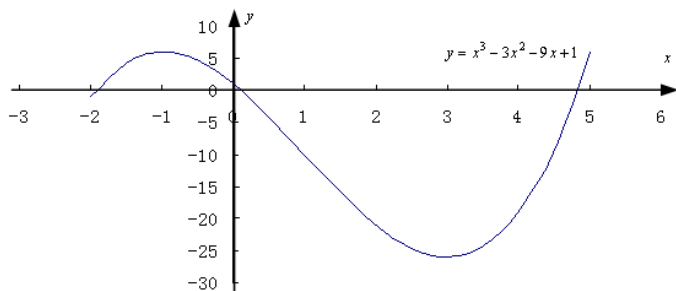
**例 1** 讨论函数  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  的极值点与极值。

**解** 此函数为多项式函数，所以其在  $(-\infty, +\infty)$  连续且可导，其导数为

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

因为当  $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$  时， $f'(x) > 0$ ，当  $x \in (-1, 3)$  时， $f'(x) < 0$ ，所以函数

在区间 $(-\infty, -1]$ 和 $[3, +\infty)$ 上单调增加, 在区间 $[-1, 3]$ 上单调减少。



此例中  $x = -1$  是函数  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  单调增加区间  $(-\infty, -1]$  与单调减少区间  $[-1, 3]$  的分界点,  $x = 3$  是单调减少区间  $[-1, 3]$  与单调增加区间  $[3, +\infty)$  的分界点, 且  $f'(-1) = f'(3) = 0$ 。因此, 极大值点为  $x = -1$ , 对应极大值  $f(-1) = 12$ ; 极小值点为  $x = 3$ , 对应极小值为  $f(3) = -26$ 。

### 设计意图:

用问题导向教学法, 让学生体会用数学思想解决问题。激发学生探求知识的热情, 引导学生思考解决问题的突破口。

## 三、连续启发, 拓展深化 (17 分钟)

**【定理】(必要条件)** 如果函数  $f(x)$  在  $x_0$  点取得极值, 且在  $x_0$  点可导, 那么  $f'(x_0) = 0$ 。

**【注意】** 由极值的定义及单调性的判别, 得到导数不存在的点也可能是函数的极值点, 例如函数  $f(x) = |x|$  和  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  在点  $x = 0$  处都是不可导的, 但  $x = 0$  是函数  $f(x) = |x|$  的极小值点, 却不是函数  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  的极值点。

因此我们需要一个方法来判断哪些驻点和导数不存在的点是极值点。

从例 1 中函数的图形可看出, 函数  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  在  $x = -1$  和  $x = 3$  分别取得极大值和极小值, 函数导数的符号在  $x = -1$  的左右两侧附近由正变为负, 而在  $x = 3$  的左右两侧附近由负变为正, 由此给出下面判别定理。

**【定理】(第一充分条件)** 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  点的某个去心邻域  $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$  内可导, 且在  $x_0$  点连续, 如果

(1) 当  $x_0 - \delta < x < x_0$  时,  $f'(x) > 0$ , 当  $x_0 < x < x_0 + \delta$  时,  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $x = x_0$  处取得极大值;

(2) 当  $x_0 - \delta < x < x_0$  时,  $f'(x) < 0$ , 当  $x_0 < x < x_0 + \delta$  时,  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在

$x = x_0$  处取得极小值.

**推论** 若  $x_0$  是  $f(x)$  的连续点, 且在  $x_0$  的左右两侧  $f'(x)$  异号, 则  $x_0$  必是  $f(x)$  的极值点, 否则,  $x_0$  不是  $f(x)$  的极值点.

**例 2** 求函数  $f(x) = x^2 e^{-x}$  的极值.

**解** 函数  $f(x) = x^2 e^{-x}$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 且

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$$

所以当  $x = 0, x = 2$  时,  $f'(x) = 0$ , 用这两个点将定义域分为  $(-\infty, 0), (0, 2), (2, +\infty)$ 。

为判断  $f'(x)$  在这两个点的两侧的符号, 列表如下

$x$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↓	0	↑	$4e^{-2}$	↓

由表可知, 函数在  $x = 0$  处取得极小值  $f(0) = 0$ , 在  $x = 2$  处取得极大值

$$f(2) = 4e^{-2}.$$

**例 3** 求函数  $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$  的极值.

**解** 函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 且

$$f'(x) = \frac{2(1 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}$$

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = -1$ , 当  $x = 0$  时,  $f'(x)$  不存在. 用这两个点将定义域分为  $(-\infty, -1), (-1, 0), (0, +\infty)$ . 为判断  $f'(x)$  在这两个点的两侧的符号, 列表如下

$x$	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	不存在	+
$f(x)$	↑	1	↓	0	↑

由表可知, 函数在  $x = -1$  处取得极大值  $f(-1) = 1$ , 在  $x = 0$  处取得极小值  $f(0) = 0$ 。

**【教师总结】** 求可导函数  $y = f(x)$  的极值的步骤:

- (1) 求定义域和导函数  $f'(x)$ ;
  - (2) 求方程  $f'(x) = 0$  在函数  $f(x)$  的定义域内的根;
  - (3) 检查  $f'(x)$  在方程根左右两侧值的符号,
- 如果左正右负, 那么  $f(x)$  在这个根处取得极大值;

如果左负右正, 那么  $f(x)$  在这个根处取得极小值.

### 设计意图:

通过对典型例题的板书, 让学生明确求极值的方法, 突出本节课的重点. 培养学生规范的表达能力, 形成严谨的科学态度.

**【问题提出】** 当求解函数的极值时, 除了利用第一充分条件的定理, 有没有更为简洁的计算方法呢?

## 四、拓展深化, 强化训练 (17 分钟)

对于二阶导数不等于零的驻点, 有一种更简单的判别法:

**【定理】(第二充分条件)** 如果函数  $f(x)$  在  $x = x_0$  处, 有  $f'(x_0) = 0$  且  $f''(x_0) \neq 0$ , 则

(1) 当  $f''(x_0) > 0$  时,  $x_0$  是  $f(x)$  的极小值点;

(2) 当  $f''(x_0) < 0$  时,  $x_0$  是  $f(x)$  的极大值点.

证 现证明结论 (1), 由导数定义及定理条件  $f'(x_0) = 0$ , 得

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

由极限的保号性原则可知, 存在  $x_0$  的去心邻域  $0 < |x - x_0| < \delta$ , 在该邻域中,

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

所以当  $x_0 - \delta < x < x_0$  时,  $f'(x) < 0$ , 当  $x_0 < x < x_0 + \delta$  时,  $f'(x) > 0$ , 由第一充分条件可知,  $f(x)$  在  $x = x_0$  处取得极小值.

类似地可证明结论 (2)。

**【注意】** 第二充分条件只适用于二阶导数不等于零的驻点, 对于二阶导数等于零的驻点和一阶导数不存在的点并不适用。

**例 4** 求函数  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$  的极值。

**解** 函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 且

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x - 1)(x - 5),$$

令  $f'(x) = 0$ , 可得驻点  $x_1 = 1, x_2 = 5$ , 又

$$f''(x) = 6x - 18 = 6(x - 3),$$

由于  $f''(1) = -12 < 0$ , 故  $f(1) = 10$  为  $f(x)$  的极大值, 而  $f''(5) = 12 > 0$ , 故

$f(5) = -22$  为  $f(x)$  的极小值。

**【教师总结】** 在求函数极值（点）时，应先求出函数的定义域，然后找出可能的极值点，即一阶导等于 0 的点（驻点）和一阶导数不存在的点，再利用充分条件判断这些点是否为极值点。

### 设计意图：

让学生体会第二充分条件在求满足条件的极值问题时，解题过程得以简化。通过两个充分条件的例题解析，对比两种不同的解题方法，让学生体会用不同的视觉去认识问题和解决问题。

**【课堂练习】** 1、函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$  在  $x = 1$  时有极值 10，求  $a$  的值。

2、已知函数  $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + 5$  在  $x = 2$  处有极值，且其图象在  $x = 1$  处的切线与直线  $6x + 2y + 5 = 0$  平行。

(1) 求函数的单调区间；

(2) 求函数  $f(x)$  的零点的个数；

(3) 若关于  $x$  的方程  $f(x) = m$  有三个不同的实根，求实数  $m$  的取值范围。

### 设计意图：

引导学生善于总结规律，发现规律，利用规律。通过例题解析和随堂练习，把易错点进行了重点梳理，使同学们从感性认识升华到理性认识。

## 五、小结概念，总结方法（3 分钟）

本节课主要讲解了一下知识点：

1. 极值点的定义；

2. 可导函数的极值点一定是驻点，但是驻点不一定是极值点；

3. 驻点和一阶导不存在的点是可能的极值点；

4. 一阶导等于 0 的点，如果二阶导大于 0 对应极小值点，如果二阶导小于 0 对应极大值点。

**【课后作业】** 课本 215 页 1, 2, 3

**【预习任务】** 函数的最值

**【课外拓展】** 请同学们查阅资料，看看极值在实践中的应用？

## 六、板书设计，条理清晰

1. 回顾函数单调性的判别；
2. 函数极值的概念及求解方法（第一充分条件和第二充分条件）。

## 教学总结

授之以鱼不如授之以渔，本节课以渗透数学思想方法为意图，先通过复习单调性的知识点，引出高台跳水问题，提出新的思考并导入新课。提高同学们观察问题，分析问题，解决问题的能力。由于学生对导数的知识学习还谈不上深入熟练，因此教学中从直观性和新旧知识的矛盾冲突中激发学生的探究热情，充分利用学生已有的知识体验和生活经验，遵循学生认知的心理规律，努力实现课程改革中以“学生的发展为本”的基本理念。

之后涉及到极值的应用方面，给同学们讲解两个历史故事，让同学们体会数学知识在生活中的应用价值，感受极值理论对于生命的保护意义。第一个故事：由于荷兰一半以上的国土位于海平面以下，于 1953 年 2 月，海水倒灌夺去了 1800 人的生命，毁坏了 4.7 万间居民住宅。荷兰政府迫切需要修筑能够保护该国数百年的新海防大堤，来应对大自然可能发起的最恶劣的挑战。可是大堤多高，才既能阻挡自然的灾害，又能不浪费资源呢？研究分析，新建的堤防达到 5 米高即可，在实际的建造过程中，拦海大堤高出海平面 7 米。而这一数据的缘由就是我们今天学习的极值理论，从此 1600 万荷兰居民得到了极值理论公式的保护。第二个故事：1981 年，货船 MVDerbyshire 在日本以南海域遭遇台风而沉没，船上 44 名船员全部遇难。2000 年，一份官方调查发现，货船沉没的原因是船的前舱舱口盖在大浪的冲击下塌陷，导致海水涌入。因此，有学者利用极值理论进行研究，发现对类似 MVDerbyshire 大小的船舶，其舱盖硬度应该再提高 35% 才能避免海难的发生。

通过两则历史故事，可以让同学们深切的体会到知识的力量。知识可以拯救一个国家的命运，知识可以推动人类的进步。作为新时代的青少年，我们要勤奋学习，锤炼身心，努力做新时代具有过硬本领和高尚品格的人。这也是本节课的思政切入点。目的在于激发同学们的学习热情，和为中华崛起而读书的志向。

