主题名称	定积分的概念	**相关知识点**	函数极限
所属课程	高等数学	**授课时长**	1 学时，45 分钟
授课对象	大一国财务类专业	**教学资源**	多媒体
参考教材章节位置	《高等数学及其应用》第二版 第 5 章　积分 5.1 节　定积分的概念及基本性质		

学情分析

本节课授课对象是非数学专业一年级本科生，学生已经具有一定的高等数学学习的基础，但是难以将有限思维提升到无限的思维。因此，在教学中需要创设情境。通过求曲边梯形面积，把储存在学生头脑里的数学知识整合成具有内部规律的数学知识链和知识体系，从而形成思想方法，获得清晰的概念。

学生通过前面极限内容的学习，已经理解了极限的思想，并掌握了极限的计算，对在此基础上建立的定积分的概念就会比较容易接受和理解。

教学目标

知识目标

学生能够理解定积分的概念，初步掌握定积分的基本思想和方法。

能力目标

(1)培养学生观察、比较、分析、总结和抽象概括的能力；

(2)利用定积分的概念，解决非均匀分布的量的求和问题。

情感态度目标

通过对问题中蕴含的数学内涵的过程进行揭示，认识到数学与生活的联系，体会数学的应用价值。

教学重点

定积分概念的理解。

教学难点

通过对定积分概念的理解，培养学生解决问题的能力。

教学方法

综合使用探讨式、启发式和讲授式的教学方法来完成教学内容。具体以情境教学和问题驱动为主要教学方法，由教师提出一系列环环相扣的问题，在教师的启发和引导下，让学生自主分析、探索，并在探索的过程中归纳总结出定积分的概念。

教学内容与过程

一、创设情境，兴趣导入（3 分钟）

由一组图片直观的抛出问题：如何求不规则图形的面积？

【问题提出】对于规则的平面图形来说，包括长方形、正方形、三角形、圆、椭圆等，同学们中学都已经涉及它们的面积公式。但是对于不规则的平面图形的面积，如何求解呢？以天津市的面积为例，我们将讨论其面积的求解方式。

能否把不规则的图形分割，以规则的图形近似计算？接下来我们将天津市地图，通过打格子进行分解，化未知为已知。问题归结为求矩形和曲边梯形的面积。

设计意图：

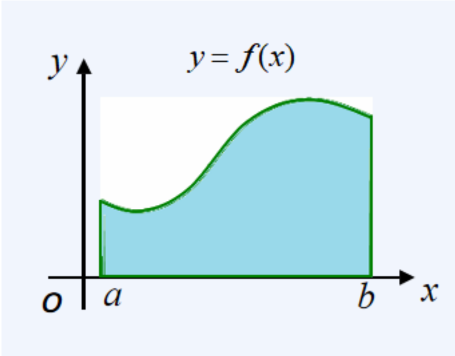
创设贴近生活的问题情境，引入“化整为零，积零为整”的思想，结合形象思维与逻辑思维来解决问题。通过实际问题引入，提高学生的学习兴趣，并且为应用定积分做铺垫。

【历史回顾】中国魏晋时期数学家刘徽创立的“割圆术”，是利用圆内接正多边形的面积无限接近圆的面积；英国数学家牛顿从运动学角度给出了微积分的思想；德国数学家莱布尼茨从几何学的角度给出了微积分的思想。

设计意图：

数学家们都是用化整为零，积零为整的思想给出的结论，说明这一思想的重要性和可行性，也为引出定积分的概念奠定了基础。

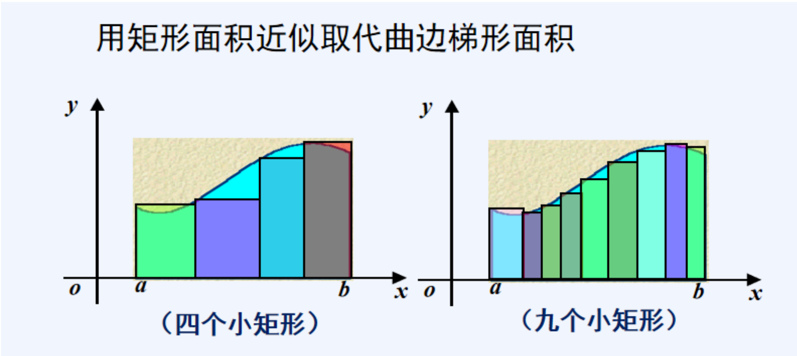
曲边梯形面积问题：设函数 $y=f(x)$在区间$[a, b]$上非负、连续。由直线 $x=a$、$x=b$、$y=0$ 及曲线 $y=f(x)$所围成的图形称为曲边梯形，其中曲线弧 $f(x)$称为曲边。



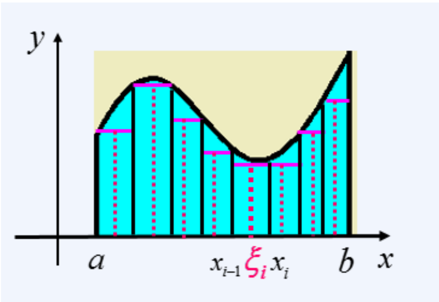
二、类比分析，归纳思想（10 分钟）

引例 1 求曲边梯形的面积

通过“割圆术”，启发学生去发现其中蕴含的“以直代曲，无限逼近”的数学思想。进而类比，能否用矩形的面积来近似代替曲边梯形的面积？通过一组图演示、分析，带领学生慢慢地建立起“分割、近似、求和、取极限”的思想。引导学生根据极限的思想，以直代曲，利用小矩形面积之和逐步逼近曲边梯形的面积。



将曲边梯形分割成一些小的曲边梯形，每个小曲边梯形都用一个小矩形代替，每个小曲边梯形的面积都近似地等于小矩形的面积，则所有小矩形面积的和就是曲边梯形面积的近似值。随着分割越细，每个小矩形的面积就越小，而它们的面积和就越接近于曲边梯形的面积。



具体步骤：

①在区间$[a, b]$中任意插入若干个分点

$$a=x_0< x_1< x_2< \cdots < x_{n-1}< x_n =b,$$

把$[a, b]$分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \cdots , [x_{n-1}, x_n],$$

它们的长度依次为$\Delta x_1 = x_1 - x_0$，$\Delta x_2 = x_2 - x_1$,…，$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. 经过每一个分点作平行于 y 轴的直线段, 把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形.。

②在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点ξ_i，以$[x_{i-1}, x_i]$为底、$f(\xi_i)$为高的窄矩形近似替代第 i 个窄曲边梯形($i=1, 2, \cdots , n$)，把这样得到的 n 个窄矩阵形面积之和作为所求曲边梯形面积 A 的近似值, 即

$$A\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

③求曲边梯形的面积的精确值，分点越多、每个小曲边梯形越窄, 所求得的曲边梯形面积 A 的近似值就越接近曲边梯形面积 A 的精确值, 因此, 要求曲边梯形面积 A 的精确值, 只需无限地增加分点, 使每个小曲边梯形的宽度趋于零. 记$\lambda=\max\{x_1, x_2,\cdots, x_n\}$, 于是, 上述增加分点, 使每个小曲边梯形的宽度趋于零, 相当于令$\lambda\to 0$. 所以曲边梯形的面积为

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

【内容升华】使学生体会到量变到质变的辩证关系，近似到精确地对立统一关系。

设计意图：

通过动画演示，形象直观的展示曲边梯形面积的计算思路中所体现的极限思想，化解教学难点。

引例 2 求变速直线运动的路程

设某物体作直线运动，已知速度 $v=v(t)$ 是时间间隔$[T_1,T_2]$上 t 的一个连续函数，且$v(t)\geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程。

【思路】先把整段时间分割成若干小段，每小段上的运动近似地看作匀速直线运动；再求出各小段路程的近似值，相加，便得到总体路程的近似值；最后通过对时

间的无限细分过程求得路程的精确值。

设计意图：

通过两个实例的分析，培养学生观察、分析、比较和归纳能力，体会 “无限分割、无穷累加”、“以直代曲、以常代变”的数学思想。

三、总结思想，概念讲授 （7 分钟）

抛开上述问题的具体意义，抓住它们在数量关系上共同的本质与特性加以概括，就抽象出下述定积分的定义。

定义　设函数 $f(x)$在$[a, b]$上有界，在$[a, b]$中任意插入若干个分点

$$a=x_0< x_1< x_2<\cdots< x_{n-1}< x_n=b,$$

把区间$[a, b]$分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

各小段区间的长依次为$\Delta x_1=x_1-x_0$, $\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots$, $\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$.

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一个点ξ_i $(x_{i-1}\le \xi_i \le x_i)$，作函数值$f(\xi_i)$与小区间长度$\Delta x_i$的乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i=1, 2,\cdots, n)$ ，并作出和

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ .$$

记$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_n\}$，如果不论对$[a, b]$怎样分割，也不论在小区间$[x_{i-1}, x_i]$上点$\xi_i$如何取值，只要当$\lambda\to 0$时，和 S 总趋于确定的极限 I，那么就称这个极限 I 为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分，记作$\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ .$$

其中$f(x)$叫做被积函数， $f(x)dx$ 叫做被积表达式， x 叫做积分变量，a 叫做积分下限，b 叫做积分上限，$[a, b]$叫做积分区间。

【说明】(1)定积分的值仅与被积函数及积分区间有关，与积分变量的记法无关，即

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du\text{。}$$

(2)定义中区间的分法与ξ_i的取法是任意的。

(3)曲边梯形的面积 A 与积分的关系：当 $f(x)>0$ 时，$\int_a^b f(x)dx=A$，当 $f(x)<0$

时，$\int_a^b f(x)dx = -A$。

(4)变速直线运动的路程：$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$。

设计意图：

(1)使学生经历将数学思想方法转化成数学语言的过程，体会数学的实用性，对数学中蕴含的理性美产生发自内心的欣赏情感。

(2)使学生理解用“极限”的思想方法去思考、处理问题，能够使问题的求解发生质的飞跃，从而体会到“取极限”方法的重要性。

【知识拓展】定积分的创始人，甚至整个微积分的创始人又是谁呢？历史上有著名的牛顿-莱布尼茨之争，他们争夺的就是微积分创始人之名。经过后人的整理发现，牛顿和莱布尼茨是从不同角度发现的微积分，牛顿是从力学角度，而莱布尼茨是从几何学角度。虽然角度不一样，但是得到了相同的结论。后人为了纪念两位科学家的贡献，将两人共同认为是微积分的创始人。

四、 连续启发，层层推进（10 分钟）

当 $f(x)$在 $[a,b]$ 上的定积分存在时，称 $f(x)$在 $[a,b]$ 上可积。当 $f(x)$在 $[a,b]$ 上的定积分不存在时，称 $f(x)$在 $[a,b]$ 上不可积。

【问题提出】那么函数 $f(x)$满足什么条件可积？

定积分存在定理：如果函数 $f(x)$在区间 $[a,b]$ 上连续或有界且只有有限个间断点，那么 $f(x)$在区间 $[a,b]$ 上可积。

例 1　利用定积分的定义计算 $\int_0^1 e^x dx$.

解： 由于 $y=e^x$ 在[0,1]上连续，所以 $y=e^x$ 在[0,1]上可积，又因为积分值是惟一的，它与积分区间的划分、点 ξ_i 的选取都没有关系，所以为了方便计算，对区间[0,1]进行特殊的分割，将积分区间[0,1]进行 n 等分，选取第 i 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的右（或左）端点作为 ξ_i，然后对积分和求极限。

第 1 步　将[0,1]分成 n 个等长的小区间 $[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则每个小区间 Δx_i 的长度为 $\frac{1}{n}$；

第 2 步　取各个小区间的右端点为 ξ_i $(i=1,2,\cdots,n)$，即 $\xi_i=\frac{i}{n}$，从而 $f(\xi_i)=e^{\frac{i}{n}}$，则 $f(x)$ 在区间[0,1]上相应的积分和为 $S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^i$

这里 $\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^i$ 是公比为 $e^{\frac{1}{n}}$，首项为 $e^{\frac{1}{n}}$ 的等比数列前 n 项的和，于是

$$S_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n\cdot e^{\frac{1}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}}=(e-1)\cdot e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}。$$

第 3 步　求极限 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(e-1)\cdot e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}=e-1$.

综上知 $\int_0^1 e^x dx=e-1$.

设计意图：

使学生体会利用“分割、近似代替、求和、取极限”方法求解问题。定积分的概念是从求解实际问题抽象得到的，它实质上是特殊的和式极限值。

五、拓展深化，强化训练（12 分钟）

例 2　求由曲线 $y=e^x$，$x=0$，$x=1$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积。

解： 由定积分的几何意义及例 1 的结果知，所求面积为：$S=\int_0^1 e^x dx=e-1$.

【练习】1.请尝试用定积分定义法求解阿基米德问题：求由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围成平面形的面积？

2. 用定积分表示下列和式的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}})$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}]$。

设计意图：

巩固和深化新知识，培养学生运用所学知识解决问题的能力。

六、小结概念，总结方法（3 分钟）

1.理解定积分的概念中分割、近似代替、求和、取极限；

2.定积分思想和方法在后期学习中的正确应用，能用到解决实际问题中去。

【思考】利用定积分的思想，能解决哪些实际生活中的问题？（并作提示），与开头的“数学来源于现实，并且用于现实”相呼应，学以致用。

【课后作业】　课本 258 页　1, 3(3), 6.

七、板书设计，条理清晰

力求条理清楚，便于学生从整体上理解定积分的概念与思想。

1.定积分的实质：$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$（特殊和式的极限）。

2.定积分的思想和方法。

3.定积分的计算。

教学总结

本节课是概念教学，概念教学绝对不是结论的简单告知，而应该是一种过程的经历，一种体验，一种感悟。要立足于本质，关注思想方法的回归，体验生成过程之美，实现概念教学的有效性。注重数学知识的内在联系，关注数学教学规律的形成过程，让学生体验数学的理性精神，感受“冰冷的美丽”与“火热的思考”相结合的美妙。

通过介绍国内外著名的数学家：国内的刘徽，国外的牛顿和莱布尼茨，引入历史的名人故事，激发同学们学习的热情，让同学们感受到量变到质变，近似到精确

的数学之美。通过介绍微积分创始人之争，说明了“**科学没有国界，但是科学家有祖国**”。这也印证了为什么钱学森院士历尽艰辛，也要回到祖国的怀抱，也要用自己学到的知识增强国家的实力。两弹一星的成功发射提高了我国的国防实力，也凝聚了自强不息的民族品格，激发了亿万中华儿女为实现中华民族伟大复兴所做出的的努力。使得同学们在情感上产生共鸣，产生血浓于水的亲和力，增强民族自豪感。这也是结合本节内容，对同学们进行思政教育的切入口。

针对学生对基础理论知识缺乏学习兴趣的问题，教学中并不停留在对基本理论的讲解上，而是以求地图等不规则图形的面积作为切入点，启发学生思考，在具体求解曲边梯形面积的问题以及变速直线运动的路程问题，建立起定积分的思想，探究出定积分的概念，并剖析其实质。并结合具体实例让学生对定积分的思想和概念展开应用探究。这样做，不仅激发了学生学习数学的兴趣，调动了学生的积极性，发挥了学生的潜能，同时培养了学生的数学素养和应用数学思想解决实际问题的能力。融入历史、数学大师和应用典范，让学生感受数学的研究背景和重大成就；巧设思考拓展，培养学生的创新意识与应用能力。