

函数、极限、连续

函数

1. 考点和解题方法

1. 利用已知条件求函数的表达式

2. 函数的性质: 有界性、周期性、奇偶性与单调性

(1) 周期性主要用于三角函数。

(2) $f(x)$ 在区间 D 上有界 $\forall x \in D, \exists M(\geq 0)$, 总有 $|f(x)| \leq M$ 。

$f(x)$ 在区间 D 上无界 $\forall M(> 0), \exists x_0 \in D$, 有 $|f(x_0)| > M$ 。

(3) 基本初等函数:

常函数 $y=c$;

幂函数 $y=x^n (n \in \mathbf{R})$;

指数函数 $y=a^x (a>0, \text{且 } a \neq 1)$;

对数函数 $y=\log_a x (a>0, \text{且 } a \neq 1)$;

三角函数 $y=\sin x / \cos x / \tan x / \cot x / \sec x / \csc x$;

反三角函数 $y=\arcsin x / \arccos x / \arctan x / \operatorname{arccot} x$ 。

初等函数 由基本初等函数经过有限次四则运算或复合且能用一个式子表达的函数。

2. 例题

1. 求函数的表达式

例 1 设 $f(x)$ 满足 $\sin f(x) - \frac{1}{3} \sin f\left(\frac{1}{3}x\right) = x$, 求 $f(x)$ 。

例 2 已知 $f(x)$ 是周期为 π 的奇函数, 且当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x) = \sin x - \cos x + 2$, 则当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时 $f(x) =$ _____。

极限

1. 考点与例题

1. 数列极限

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 的定义: $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - A| < \epsilon.$$

(2) 收敛数列的性质

定理 1 (唯一性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 则其极限 A 是唯一的。

定理 2 (有界性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 为有界数列。

定理 3 (保号性) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A > 0 (< 0)$, 则 $\exists N \in \mathbf{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$x_n > 0 (< 0).$$

2. 函数的极限

(1) 六种极限过程下函数极限的定义

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

例如 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 的定义: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

定理 1 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(a^-) = f(a^+) = A$ 。

定理 2 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow f(-\infty) = f(+\infty) = A$ 。

(2) 函数极限的性质

定理 3 (唯一性) 在某一极限过程下, 若函数 $f(x)$ 的极限存在, 则其极限是唯一的。

定理 4 (有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在, 则存在 $x = a$ 的去心邻域 \dot{U} , 使得 $f(x)$ 在 \dot{U} 上有界。

定理 5 (保号性) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0 (< 0)$, 则存在 $x = a$ 的去心邻域 \dot{U} , 使得 $x \in \dot{U}$ 时 $f(x) > 0 (< 0)$ 。

3. 证明数列或函数极限存在的方法

定理 1 (夹逼准则) 设 3 个数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 。

定理 2 (夹逼准则) 设 3 个函数 $f(x), g(x), h(x)$ 在 $x = a$ 的去心邻域中满足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 。

注 对于其他的极限过程, 类似的结论留给读者自己写出。

定理 3 (单调有界准则) 若数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 并有上界 (或单调减少, 并有下界), 则数列 $\{x_n\}$ 必收敛。

4. 无穷小量

(1) 若在某极限过程中 ($x \rightarrow a, x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ 中任一个), 某变量

或函数 $\alpha(x) \rightarrow 0$, 则称 $\alpha(x)$ 为该极限过程下的无穷小量, 简称无穷小。在同一极限过程中的有限个无穷小量之和仍为无穷小量; 在同一极限过程中的有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量; 无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量。例如

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \left(\text{因 } x \rightarrow 0, \sin \frac{1}{x} \text{ 有界} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \left(\text{因 } \frac{1}{x} \rightarrow 0, \sin x \text{ 有界} \right)。$$

定理 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 这里 $x \rightarrow a$ 时 $\alpha(x)$ 为无穷小量。

(2) 无穷小的比较

假设在某极限过程中(以 $x \rightarrow a$ 为例), α, β 都是无穷小量。

①若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 0$, 则称 α 是 β 的高阶无穷小, 记为 $\alpha = o(\beta)$ 。

②若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \infty$, 则称 α 是 β 的低阶无穷小。

③若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow c (c \neq 0, c \in \mathbb{R})$, 则称 α 与 β 为同阶无穷小。特别地, 当 $c=1$ 时, 称 α 与 β 为等价无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta (x \rightarrow a)$ 。

④若 $\frac{\alpha}{x^k} \rightarrow c (c \neq 0, k > 0)$, 则称 α 是 x 的 k 阶无穷小。此时 $\alpha \sim cx^k$, 称 cx^k 为 α 的无穷小主部。

5. 无穷大量

(1) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 下列数列无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln n, \quad n^\alpha (\alpha > 0), \quad n^\beta (\beta > \alpha > 0), \quad a^n (a > 1), \quad n^n。$$

(2) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 下列函数无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln x, \quad x^\alpha (\alpha > 0), \quad x^\beta (\beta > \alpha > 0), \quad a^x (a > 1), \quad x^x。$$

6. 求数列或函数的极限的方法

(1) 四则运算法则。

(2) 利用夹逼准则求极限。

(3) 先利用单调有界准则证明数列的极限存在, 再求其极限。

(4) 利用两个重要极限求极限:

$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1, \quad \lim_{\square \rightarrow 0} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e。$$

例如 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{\cos x - 1}} = e$ (这里 $\square = \cos x - 1$)。

(5) 利用等价无穷小代换求极限。

定理 当 $\square \rightarrow 0$ 时, 有下列无穷小的等价性:

$$\square \sim \sin \square \sim \arcsin \square \sim \tan \square \sim \arctan \square \sim \ln(1 + \square) \sim e^\square - 1,$$

$$(1 + \square)^\lambda - 1 \sim \lambda \square \quad (\lambda > 0),$$

$$1 - \cos \square \sim \frac{1}{2} \square^2。$$

(6) 利用洛必达法则求极限。

(7) 利用麦克劳林展开求极限。

(8) 利用导数的定义求极限。

(9) 利用定积分的定义求极限。

(10) 利用级数收敛的必要条件。

例题

1. 利用四则运算法则求极限

例 1 已知 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 5$, 求 a 和 b 。

2. 利用夹逼准则与单调有界准则求极限

例 2 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$ 。

例 3 设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} (n=1, 2, \cdots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限。

3. 利用两个重要极限求极限

例 4 设 $u_n = \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{2(1+2+\cdots+k)} \right]^n$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ 。

例 5 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) + \frac{1}{2} \right]^{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$ 。

4. 利用单侧极限求极限

例 6 求 $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $g(x) = \frac{1-a^{\frac{1}{x}}}{1+a^{\frac{1}{x}}}$ ($a > 1$), 当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限, 并说明 $x \rightarrow 0$ 时极限是否存在。

5. 利用等价无穷小代换求极限

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{(x+x^2)\ln(1+x)\arcsin x}$ 。

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\ln \cos x}$ 。

例 9 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x - 1} = A (a > 0, a \neq 1)$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ 。

例 10 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{\ln(1 - 2x) + c(1 - e^{-x^2})} = 2$, 求 a 的值。

6. 利用无穷大的比较求极限

例 11 对充分大的一切 x , 5 个函数 1000^x , e^{3x} , $\log_{10} x^{1000}$, $e^{\frac{x^2}{1000}}$, $x^{10^{10}}$ 中最大的是

_____。

1.3 连续与间断

1.3.1 考点综述和解题方法点拨

1. 连续的有定义和性质

(1) $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处连续。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ 或 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 (\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)).$$

(2) $f(x)$ 在 $x=a$ 处单侧连续。

$$\text{左连续: } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a); \text{ 右连续: } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

(3) $f(x)$ 在区间上连续。

设 I 为开区间, $\forall x_0 \in I$, 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $f(x)$ 在 I 内连续。

设 I 为闭区间, 若 $f(x)$ 在开区间内连续, 在左端点右连续, 在右端点左连续, 则 $f(x)$ 在闭区间上连续。

(4) 连续的运算: 四则运算, 复合运算。

(5) 初等函数在其定义区间上连续。

2. 间断点

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处, 无定义或有定义无极限或有定义有极限, 但 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$, 则 $x=a$ 为 $f(x)$ 的间断点。

(2) 间断点的分类:

间断点 $\left\{ \begin{array}{l} \text{第一类间断点(左、右极限都存在)} \left\{ \begin{array}{l} \text{可去间断点(左极限=右极限)} \\ \text{跳跃间断点(左极限}\neq\text{右极限)} \end{array} \right. \\ \text{第二类间断点(左、右极限不全存在)} \left\{ \begin{array}{l} \text{无穷间断点} \\ \text{振荡间断点(如 } \sin \frac{1}{x} \text{ 在 } x=0 \text{ 处)} \end{array} \right. \end{array} \right.$

3. 闭区间上连续函数的性质

若 $f(x) \in C[a, b]$ 则有下列结论:

(1) $\exists M$, 使得 $\forall x \in [a, b]$, 有 $|f(x)| \leq M$ (有界性);

(2) $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$, 使得 $m = f(x_1) = \min\{f(x)\}$, $M = f(x_2) = \max\{f(x)\}$ (最值定理);

(3) 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$ (零点定理)。

1. 例题

例 1 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 为连续函数, 试确定 a 和 b 的值。

例 2 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ a, & x \geq 1, \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} b, & x \leq 0, \\ x+1, & x > 0, \end{cases}$$

求 a, b 使 $f(x) + \psi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

例3 求函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内的间断点, 并判断其类型。

例4 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $g(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则()。

- A. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点 B. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点
C. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点 D. $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

例5 设 $f(x)$ 对一切实数满足 $f(x^2) = f(x)$, 且在 $x=0$ 与 $x=1$ 处连续, 求证: $f(x)$ 恒为常数。

例6 设函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有定义, 且函数 $e^x f(x)$ 与函数 $e^{-f(x)}$ 在 $(0, 1)$ 内都是单调递增的, 求证: $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内连续。

例 7 (1)证明 $f_n(x) = x^n + nx - 2$ (n 为正整数) 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一正根 a_n ; (2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n$ 。

例 8 设 $f(x)$ 在 $[0, n]$ (n 为自然数, $n \geq 2$) 上连续, $f(0) = f(n)$, 证明: 存在 $\xi, \xi + 1 \in [0, n]$, 使 $f(\xi) = f(\xi + 1)$ 。

例 9 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $x_i \in [a, b], t_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 且 $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, 试证至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$f(\xi) = t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \dots + t_n f(x_n)。$$

大学生数学（经济管理类）竞赛辅导

函数、极限、连续

一、填空：

1. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & x < 0 \\ a \cos x + x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $a =$ _____。

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{3x-1} \sin \frac{1}{x} =$ _____。

3. 设对一切实数 x 和 y , 恒有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 且知 $f(\sqrt{2}) = 1$, 则 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$ _____。

4. 设函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, 则函数 $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的定义域为 _____。

5. 设要使函数 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $a =$ _____。

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} =$ _____。

7. 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x - \cos x}, & x \neq 0 \\ ae^{-\sin x}, & x = 0, \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 则 $a =$ _____。

10. 设 $f(0) > 0$, $f'(0) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{f(0)} \right]^n =$ _____。

11. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 4$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} =$ _____。

12. 设 $f(x) = \frac{2x^2+3}{x-2} + ax + b$, 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____。

13. 设 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____。

二、选择题：

1. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$ 且 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 则 ()

(A) $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)]$ 存在;

(B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = A$

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)]$ 不存在;

(D) A、B、C 均不正确。

2. 曲线 $y = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 - x + 1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有 ()

(A) 1 条;

(B) 2 条;

(C) 3 条;

(D) 4 条。

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\tan x} - 1}{e^{2x} - 1} = 3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ ()

(A) 12;

(B) 3;

(C) 1;

(D) 0。

6. 设函数 $f(x)$ 可导, 并且 $f'(x_0) = 5$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 该函数在点 x_0 处微分 dy 是 Δy 的 ()

(A) 等价无穷小;

(B) 同阶但不等价的无穷小;

(C) 高阶无穷小;

(D) 低阶无穷小。

7. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(\sqrt{1-x^2} - 1) \cdot \ln(1+x^2)$ 是比 $\ln(1+x^n)$ 高阶的无穷小, 而 $\ln(1+x^n)$ 是比 $\ln \cos x$ 高阶的无穷小, 则 n 等于 ()

(A) 4;

(B) 3;

(C) 2;

(D) 1。

8. 函数 $f(x) = \frac{x}{\ln|1-x|}$ 的第一类间断点的个数为 ()。

(A) 0;

(B) 1;

(C) 2;

(D) 3。

9. 下列命题:

(1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b$, 且 $a > b$, 则必有 $u_n > v_n (n = 1, 2, \dots)$ 。

(2) 设 $u_n > v_n (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = b$, 则必有 $a > b$ 。

(3) 设 $u_n \leq x_n \leq v_n (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 必存在。

正确的个数为 ()。

(A) 0 个;

(B) 1 个;

(C) 2 个;

(D) 3 个。

10. 设函数 $f(x)$ 有连续导数, $f(0) = 1$ $f'(0) = 3$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{1}{2x}} =$ ()。

(A) 1

(B) e

(C) $e^{2/3}$

(D) $e^{3/2}$

大学生数学（经济管理类）竞赛辅导

函数、极限、连续 第三、四次课

复习一元微积分中函数、极限、连续问题的知识点和求解方法：

1. 数列求和或求通项的常见方法：等差数列、等比数列公式法，倒序相加法、错位相减法、裂项相消法、拆项分组求和法、并项求和法；
2. 闭区间连续函数的性质：最值性质、介值性质、根的存在定理；
3. 函数与极限的关系；函数与导数值之间的关系；
4. 两个重要极限，重点是会构造第二类重要极限；
5. 夹逼准则和单调有界准则；
6. 等价无穷小替换求极限；
7. 用洛必达法则求极限；
8. 用泰勒公式求极限；
9. 用积分定义求极限。

一、计算题

1. 已知 $a > 0$, $x_1 > 0$, 定义

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} \left(3x_n + \frac{a}{x_n^3} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

求证： $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在，并求其值。

2. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}}{x^n} = C \neq 0$, 试确定常数 n 和 C 的值。

3. 设函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某邻域内具有二阶导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^3.$$

求: $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

4. 设函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f''(0) = 4$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$.

5. 求常数 a, b , 使

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-ax}-1}{x}, & x < 0, \\ ax+b, & 0 \leq x \leq 1, \\ \arctan \frac{1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

在所定义的区间上连续。

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}} =$

7. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量

① $\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}$;

② $\sqrt{1 + 2x} - \sqrt[3]{1 + 3x}$;

③ $x - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos x\right) \sin x$;

④ $e^{x^4 - x} - 1$,

从低阶到高阶的排列顺序为 ()

(A) ①②③④;

(C) ③①②④;

(B) ④③②①;

(D) ④②①③。

8. 设正整数 $n > 1$, 证明方程 $x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} x - 1 = 0$ 至少有两个实根。

9. 设 $x_0 > 0, x_n = \frac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}$ ($n = 1, 2, \dots$)。证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求之。

类似练习: 已知 $a > 0, x_1 > 0$, 定义

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} \left(3x_n + \frac{a}{x_n^3} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

求证: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 并求其值。

10. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, $f(0) = f(1)$, 证明: 对于任意给定的整数 $n > 2$, 必存在 $x_n \in [0, 1)$ 使得

$$f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right)。$$

11. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} & x < 0 \\ 6 & x = 0 \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} & x > 0 \end{cases}$$

- (1) a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续;
- (2) a 为何值时, $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。

12. 设 $x_n = n \left[e \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} - 1 \right]$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

13. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\cos f\left(x_0 - \frac{2}{n}\right) - \cos f(x_0) \right]$.

14. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(n^3 - n^2 + \frac{n}{2} \right) e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1 + n^6} \right]$.

15. 设 $a_1 \geq -12$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在并求其值。

16. 设 $a_n = \left(\frac{1+a_{n-1}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ($n=1, 2, 3, \dots$), $a_0 = \cos \theta$ ($0 < \theta < \pi$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n(1-a_n)$.

$$\left(\frac{\theta^2}{2}, \text{ 其中 } a_n = \cos \frac{\theta}{2^n} \right)$$

17. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$, 并且对于 $x \geq 1$ 有 $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}. \quad \left(\text{提示: 证明 } f(x) \text{ 单调增加有上界, 用到 } f(x) - f(1) = \int_1^x f'(x) dx \right)$$

18. 求 a, b, c 为何值时, 下式成立 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x - ax} \int_b^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} = c$ 。

类似练习: 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}}{x^n} = C \neq 0$, 试确定常数 n 和 C 的值。

19. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 记 $\varphi(x) = \int_0^1 f'(xt) dt$, 求 $\varphi(x)$ 的导数, 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

20. 设 $f(x)$ 是除 $x=0$ 点外处处连续的奇函数, $x=0$ 为其第一类跳跃间断点, 证明 $\int_0^x f(t) dt$ 是连续的偶函数, 但在 $x=0$ 点处不可导。

21. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 并且对任一 $x \in [a, b]$, 存在 $y \in [a, b]$ 使得 $f(y) = \frac{1}{2}|f(x)|$. 证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) = 0$.

22. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x + \ln(1 - 2x)]}$ 。