市场均衡稳定性——蛛网模型

蛛网模型就是通过引进时间变化的因素，连续考察属于不同时期的需求量、供给量和价格之间的相互作用，用动态分析的方法，论述诸如农产品、畜牧产品这类生产周期较长的商品的产量和价格在偏离均衡状态以后的实际波动过程及其结果。

例1 据统计某城市2013年的猪肉产量为36万吨，价格为每公斤12元，2014年猪肉产量为22万吨，价格为每公斤16元，2015年猪肉产量29万吨。若维持目前的消费水平和生产模式，经过若干年后猪肉的生产量和价格是否会趋于稳定（即若干年后相邻两年的猪肉生产量和价格没有明显的波动）？

解 为了方便，假设猪肉的需求函数和供给函数均为线性函数。

设Q_t 和P_t 分别表示第t期猪肉的产量和价格. 由于当年的确定当年的价格，所以

$$P_t = a + bQ_t \qquad \text{（需求函数）}$$

而当年价格又决定下一年的产量，所以

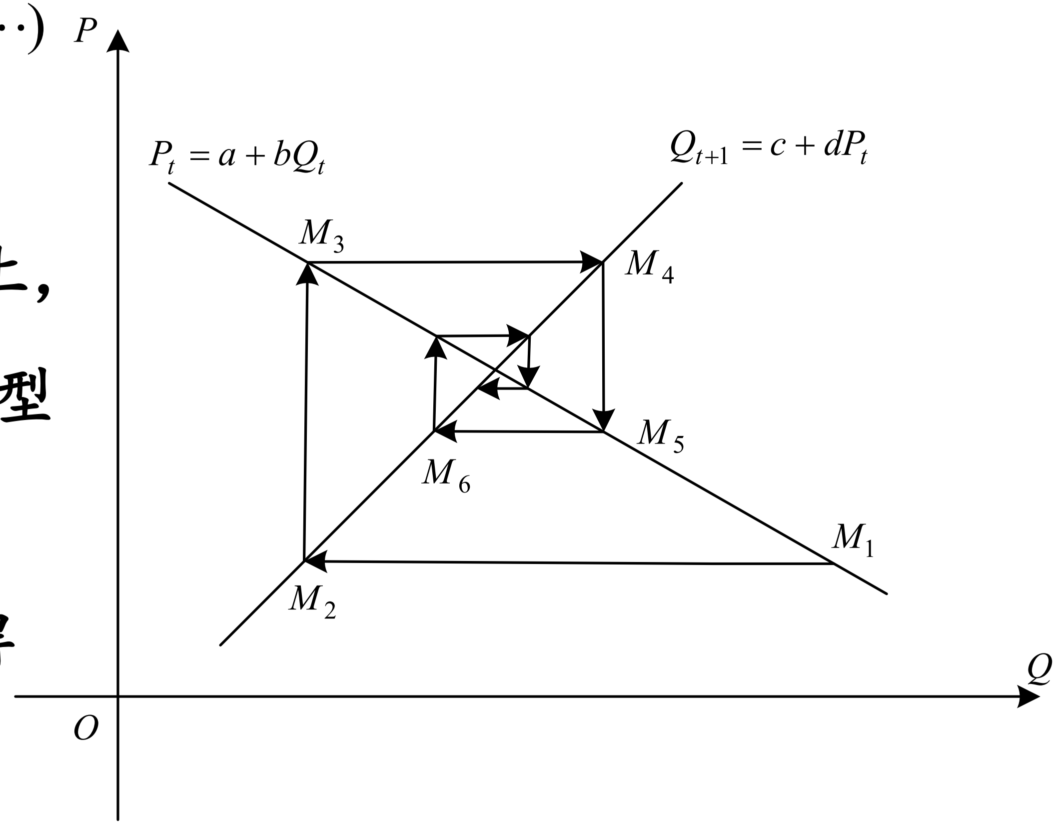
$$Q_{t+1} = c + dP_t \qquad \text{（供给函数）}$$

这时产销过程可表示为：

$$Q_1 \to P_1 \to Q_2 \to P_2 \to \cdots$$

设点M_{2n-1}的坐标为(Q_n,P_n)，M_{2n}的坐标为$(Q_{n+1},P_n),(n=1,2,\cdots)$

由图示可知，点$M_{2n-1}(1,2,\cdots)$都在需求曲线上，点$M_{2n}(1,2,\cdots)$都在供给曲线上，这种供求关系称为蛛网模型



（蛛网图）

由于$M_1(36,12),M_3(22,16)$在需求曲线上，故可求得

$$P_t=\frac{156}{7}-\frac{2}{7}Q_t$$

由$M_2(22,12),M_4(29,16)$，可求得

$$Q_{t+1}=1+\frac{7}{4}P_t$$

经过若干年后猪肉的生产量和价格是否会趋于稳定的问题，用数学语言描述就是若干年后猪肉生产量和价格是否趋于常数的问题。

先讨论产量的稳定性问题：

由求得的需求函数和供给函数可得

$$Q_{t+1}=1+\frac{7}{4}(\frac{156}{7}-\frac{2}{7}Q_t)=40-\frac{1}{2}Q_t$$

逐步递推得到

$$Q_{n+1}=(-\frac{1}{2})^n Q_1+40\cdot[\sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2})^{k-1}]$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} Q_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\{(-\frac{1}{2})^n Q_1+40\cdot[\sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2})^{k-1}]\}$$

$$=40\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1+\frac{1}{2}}=40\cdot\frac{2}{3}\approx 26.67$$

结论：产量稳定

再讨论价格的稳定性问题：

同理可得到

$$P_{n+1}=(-\frac{1}{2})^{n}P_{1}+22\cdot[\sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2})^{k-1}]$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}P_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\{(-\frac{1}{2})^{n}P_{1}+22\cdot[\sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2})^{k-1}]\}$$

$$=22\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-(-\frac{1}{2})^{n}}{1+\frac{1}{2}}=22\cdot\frac{2}{3}\approx 14.67$$

结论：价格稳定

综上所述可得，若维持目前的消费水平和生产模式，经过若干年后猪肉的生产量和价格是会趋于稳定的，猪肉产量稳定在年产26.67万吨，价格稳定在每公斤14.67元.

蛛网模型描述了经济学中一种重要的经济现象，前面利用极限的思想对蛛网模型已进行了较详细的讨论.下面运用差分方程这一工具对蛛网模型作进一步的讨论.

例2 设 Q_t 和 P_t 分别表示第t期商品的产量和价格，需求函数与供给函数分别为 $P_t = a + bQ_t$ 与 $Q_{t+1} = c + dP_t$ ，那么参数满足什么条件，经过若干年后该商品的产量与价格才能趋于稳定呢?

解: 将 $P_t = a + bQ_t$ 代入$Q_{t+1} = c + dP_t$得

$$Q_{t+1} - dbQ_t = C + da,$$

解此一阶常系数线性非齐次差分方程得

$$Q_t = C(db)^t + \frac{c + da}{1 - db}$$

由此可知，该商品的产量与价格的稳定性主要取决于$P_t = a + bQ_t$ 和 $Q_{t+1} = c + dP_t$ 的斜率b与d，具体情况如下：

(1) 当 $|db|<1$，即 $|b|<\dfrac{1}{|d|}$ 时，商品的产量和价格趋于稳定（如图1所示），且 $\lim\limits_{t\to\infty}Q_t=\dfrac{c+da}{1-db}$；

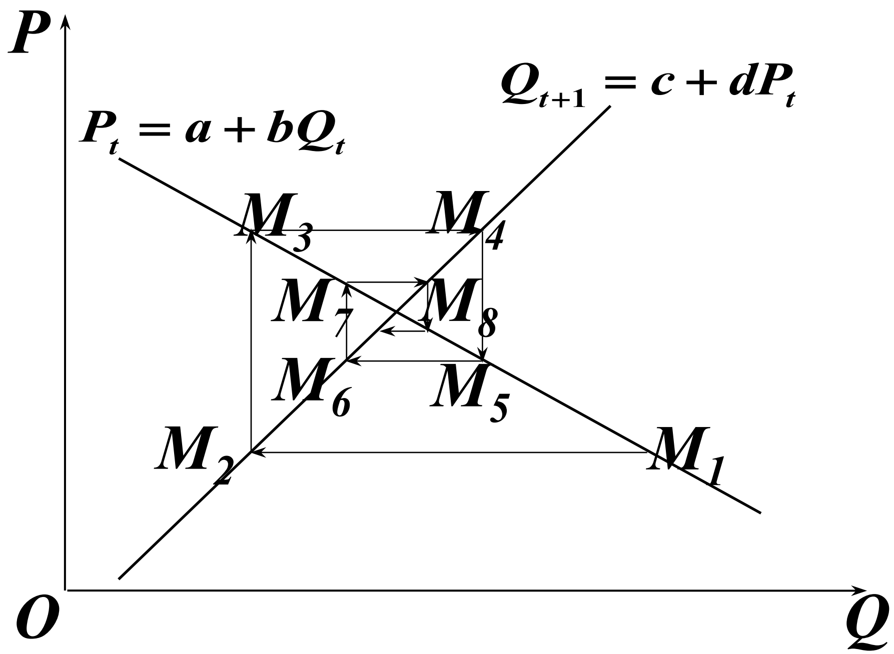


图1

(2) 当 $|db|>1$ ，即 $|b|>\dfrac{1}{|d|}$ 时，商品的产量和价格不稳定（如图2所示）.

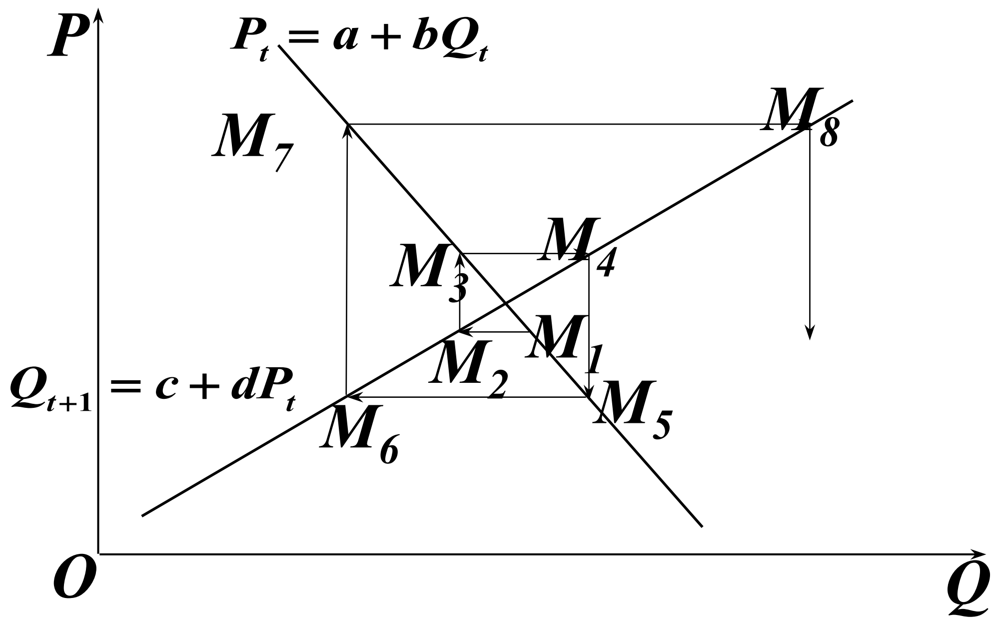


图2

如果需求函数和供给函数是非线性函数，可以用同样的方法来讨论若干年后该商品产量和价格的稳定性问题.

假如确定了商品的需求函数和供给函数的表达式，记作

$$P_t = f(Q_t), Q_{t+1} = h(P_t) \text{ (或 } P_t = g(Q_{t+1}) \text{)}$$

且记曲线 $P = f(Q)$ 与 $P = g(Q)$ 的交点为 M_0 ，则当商品量偏离 M_0 点不大时，产量和价格的稳定性取决于曲线 f 和g在 M_0 点的斜率. 如果记 f 在M_0 点的斜率的绝对值为K_f，g 在M_0 点的斜率的绝对值为 K_g ，则

(1) 当 $K_f < K_g$ 时，商品的产量和价格趋于稳定（如图3所示）；

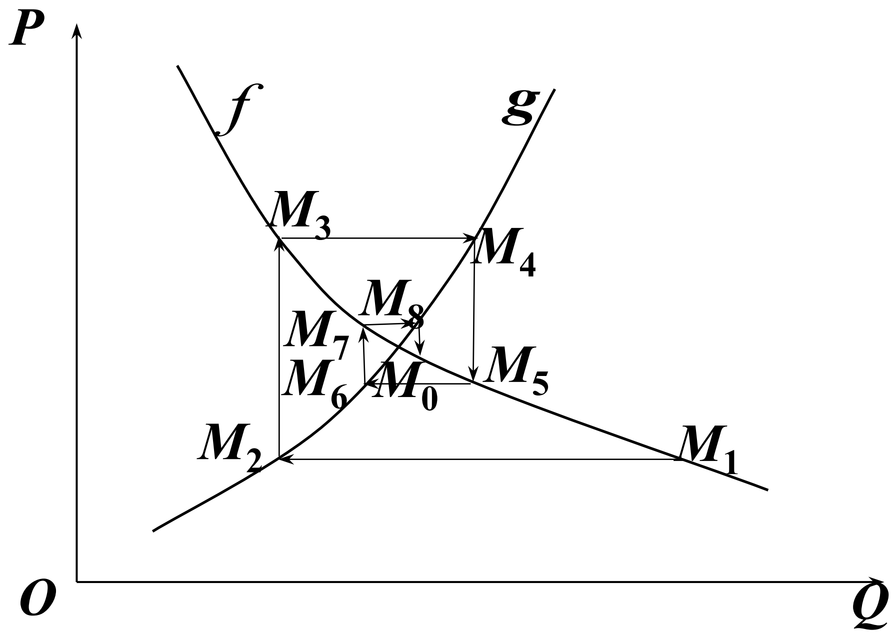


图3

(2) 当 $K_f > K_g$ 时，商品的产量和价格不稳定（如图4所示）.

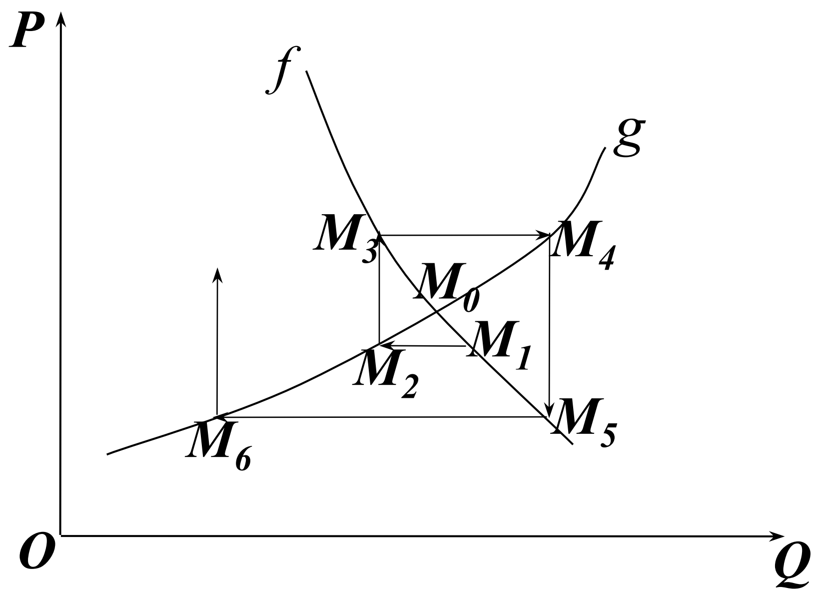


图4

由此可见，需求曲线越平，供给曲线越陡，越有利于产量和价格的稳定，进而越有利于经济稳定.