主题名称	二重积分的概念	相关知识点	函数极限、定积分
所属课程	高等数学	授课时长	1 学时，45 分钟
授课对象	大一经济类专业	教学资源	多媒体
参考教材 章节位置	《高等数学及其应用》第二版 第 9 章 重积分 9.1 节 二重积分的概念与性质		

学情分析

本节课授课对象是经济类专业一年级本科生，学生已经具有一定的高等数学学习的基础，具备有限思维提升到无限的思维能力。

在学习本节内容时，学生已经具有了一元函数积分学、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用等相关知识的积累，并且有一定的空间几何作图能力和多元函数的导数运算能力，为二重积分概念的学习奠定了基础，可以通过数形结合的方式学习本节的相关内容。

教学目标

知识目标

掌握二重积分的概念。

能力目标

培养学生观察、比较、分析、总结和抽象概括的能力。

情感态度目标

通过对问题中蕴含的数学内涵的过程进行揭示，认识到数学与生活的联系，体会数学的应用价值；能够运用定义解决实际问题。

教学重点

二重积分的概念。

教学难点

二重积分解决问题的步骤、二重积分的几何意义。

教学方法

依据以上教学难点和重点，在讲解引例时，采用启发式教学模式，根据题目中具

体条件，结合图形引导学生从简单规则图形入手，由学生自己去思考、去分析，充分发挥学生的主体作用，引导学生学会对比、联想、归纳、总结等思想方法，从而提高学生学习二重积分的积极性和自信心。

综合使用探讨式、启发式和讲授式的教学方法来完成教学内容。具体以情境教学和问题驱动为主要的教学方法，由教师提出一系列环环相扣的问题，在教师的启发和引导下，让学生自主分析、探索，并在探索的过程中归纳总结出二重积分的概念。

教学内容与过程

一、创设情境，兴趣导入（3 分钟）

同学们，在第一学期一元函数积分学中，我们学习了定积分，通过曲边图形的面、变速直线运动的路程，得到了定积分的定义。

【问题提出】定积分的主要思想是什么？

定积分是由化整为零、积零为整、取极限得到的。定积分又叫做黎曼积分，是由德国数学家、物理学家黎曼创造的。黎曼积分的思想可以贯穿整个多元函数的积分学，那么今天我们利用黎曼积分的思想继续解决两个实例。

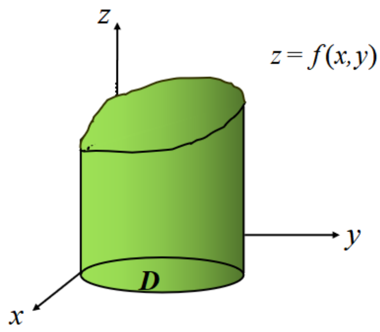
设计意图：

注重学习的迁移原理，从复习定积分入手，用巧妙的类比的数学思想方法，学习二重积分，使学生温故而知新。

二、类比分析，归纳思想（7 分钟）

引例 1 求曲顶柱体的体积

将教室外形抽象出来，放入空间直角坐标系。观察：



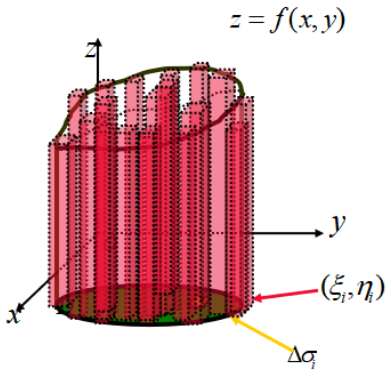
曲顶柱体的定义　底：xoy面上的闭区域D；侧面：以D的边界曲线为准线，母线平行于z轴的柱面；顶：连续曲面$z=f(x,y)\geq 0$.

【问题提出】那么如何求曲顶柱体的体积？

我们知道，平顶柱体体积=底面积×高

【问题提出】什么条件可使“平”与“曲”这对矛盾相互转化呢？

对，定积分的思想“化整为零、积零为整、取极限”。



(1)分割

用任意一组曲线网分D为n个区域$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$（该符号也表示小区域的面积)。然后分别以每个小区域的边界曲线为准线，以平行于Oz轴的直线为母线，生成的柱面将曲顶柱体相应地分成n个小曲顶柱体。

(2)近似求和

在每个小曲顶柱体的底$\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i,η_i)，用以$f(\xi_i,\eta_i)$为高，$\Delta\sigma_i$为底的平顶柱体的体积$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$近似第$i$个小曲顶柱体的体积，然后再将这些平顶柱体的体

积相加，得到曲顶柱体体积的近似值$V_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

(3)取极限

令d_i 表示第i个小区域中任意两点间距离的最大值，称为区域$\Delta\sigma_i$的直径，记

$\lambda=\max d_i$. 当区域D无限细分，即$\lambda\to 0$， V_n 的极限就是曲顶柱体的体积。

【内容升华】使学生体会到量变到质变的辩证关系，近似到精确地对立统一关系。

设计意图：

通过动画演示，形象直观的展示曲顶柱体的体积计算思路中所体现的极限思想，化解教学难点。

引例2 设有一平面薄片，占有xOy面上的闭区域D，在点(x,y)处的面密度为$\rho(x,y)$，假定$\rho(x,y)>0$在D上连续，平面薄片的质量为多少？

同学们，思考得出。根据解决问题的四个步骤得出 $m=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，本例也是二重积分的物理意义。

设计意图：

通过两个实例的分析，培养学生观察、分析、比较和归纳能力，体会“无限分割、无穷累加”、“以直代曲、以常代变”的数学思想。

三、总结思想，概念讲授 （10 分钟）

以上两个问题虽然其意义不同，但我们发现，解决问题的步骤和结构式方法是相同的，并且最后所得的结果都归结为“和式的极限”。

抛开上述问题的具体意义，抓住它们在数量关系上共同的本质与特性加以概括，就抽象出下述定积分的定义。

设$f(x,y)$是有界闭区域D上的有界函数。将闭区域D任意分成n个小闭区域：$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots\cdots,\Delta\sigma_n$，以$\Delta\sigma_i$表示第$i$个小闭区域的面积，以$d_i$表示$\Delta\sigma_i$的直径，并令$\lambda=\max d_i$. 在每个$\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i,η_i)，作和式：$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 如果当$\lambda\to 0$时，该积分和的极限存在，则称此极限值为$f(x,y)$在区域D上的二重积分，记作

$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$，即 $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma i$．其中 $f(x,y)$ 称为被积函数，$f(x,y)d\sigma$ 称为积分表达式，$d\sigma$ 称为面积元素，x,y 称为积分变量，D 称为积分区域。

设计意图：

(1)使学生经历将数学思想方法转化成数学语言的过程，体会数学的实用性，对数学中蕴含的理性美产生发自内心的欣赏情感。

(2)使学生理解用“极限”的思想方法去思考、处理问题，能够使问题的求解发生质的飞跃，从而体会到“取极限”方法的重要性。

四、连续启发，层层推进（10 分钟）

【问题提出】那么函数 $f(x,y)$ 满足什么条件具有二重积分？

二重积分存在定理　当 $f(x,y)$ 在 D 上连续时，则函数 $f(x,y)$ 在 D 上二重积分必存在。

【内容总结】二重积分的几何意义

(1)当 $z=f(x,y)\geq 0$ 时，$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma =$ 曲顶柱体的体积；

(2)当 $z=f(x,y)<0$ 时，$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = -$(曲顶柱体的体积)

(3)如果 $f(x,y)$在 D 的若干区域上是正的，而在其他区域上是负的，则

$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$表示各小曲顶柱体体积的代数和。

(4)二重积分 $\iint\limits_{D}|f(x,y)|d\sigma$ 表示以区域 D 为底，$f(x,y)$ 为高的曲顶柱体的体积。

设计意图：

定积分的概念是从求解实际问题抽象得到的，它实质上是特殊的和式极限值。运用二重积分的几何意义进行计算，同时启发学生学习高等数学的过程中必须弄清楚数学概念和数学原理，弄清每一个概念的几何意义。

五、拓展深化，强化训练（12 分钟）

例 1　已知 $F(x,y) = xy + \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$，其中 D 为 xOy 平面上的有界闭区域，且 $f(x,y)$ 在 D 上连续，求 $F(x,y)$在点(1,1)处的全微分。

【分析】 $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ 表示与 x,y 无关的常数，因此其微分为 0.

例 2 利用定义求二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}d\sigma$,其中$D$:$\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le R^2\right\}$.

【分析】由二重积分的几何意义知所求二重积分等于球心在原点，半径为 R 的上半球的体积，所以 $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}d\sigma=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi R^3$

设计意图：

巩固和深化新知识，培养学生运用所学知识解决问题的能力。

六、小结概念，总结方法（3 分钟）

掌握以直代曲的解决问题的数学思想，掌握解决问题的三个步骤。

【思考】试比较二重积分与定积分的定义，请找出它们的相同之处与不同之处。

【课后作业】　课本 258 页　1, 3(3), 6.

七、板书设计，条理清晰

力求条理清楚，便于学生从整体上理解二重积分的概念与思想。

1. 二重积分的概念：$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma i$（特殊和式的极限）。

2. 二重积分的几何意义。

教学总结

本节课讲授过程中通过设置问题，从简单熟悉的情形入手，激发学生学习二重积分的兴趣，引导学生自动探索，逐步学习到曲顶柱体的解题思想，从而学习并理解二重积分的概念。二重积分的概念属于概念的同化，即利用已学过的相关概念，通过知识的迁移，由实例获得新概念的本质属性过程。

本节内容讲到曲顶柱体的体积和平面薄片质量的计算也是二重积分的几何意义和物理应用之一，对后面的学习也有很好的促进作用。