可分离变量微分方程课程思政案例

<table>
<tr><td>课 程
名 称</td><td>高等数学C</td><td>授 课
对 象</td><td>经管类本科生</td></tr>
<tr><td>知 识
点</td><td colspan="3">《高等数学及其应用》第三版
第11章 微分方程
第11.2节 一阶微分方程</td></tr>
<tr><td>教 学
目 标</td><td colspan="3">知识目标
(1)了解可变量分离微分方程的特点；
(2)掌握可变量分离微分方程的解法。
能力目标
(1)学会将现实生活中含变化率的问题转化为微分方程模型进行解决；
(2)培养学生清晰的逻辑思维能力及解决实际问题的能力。
价值目标
(1)挖掘思政元素，与知识点融合在一起，提高和激发学生的学习热情；
(2)通过对问题中蕴含的数学内涵过程进行揭示，认识数学与生活的联系，体会数学的应用价值。</td></tr>
<tr><td>案 例
思 政
元 素
设 计</td><td colspan="3">微分方程单纯的用理论去讲解概念和求解方法，学生不容易接受，本知识点采用以“案例式教学法”“问题教学法”“研讨教学法”等教学模式，引导学生在层层递进的问题中学习可分离变量微分方程的解法。通过对问题的分析，建立可分离变量微分方程的模型，在解决模型的过程中又碰到新的问题，这一类微分方程如何进行求解？从而进入问题探究。整个教学过程遵循从特殊到一般的认知思路，逐步引导学生思考、分析问题，最后解决问题，得出结论，避免毫无缘由地摆出方程类型、硬塞给学生求解方法的教学。
结合当前的疫情，引导学生用数学知识对实际问题进行数学建模能力。肆虐的疫情考验着全社会的应变能力，也让教育领域面临着前所未有的考验和挑战。在一系列的举措和努力下，短时间内我国国内疫情防控取得很好的成效，生产生活秩序也逐步恢复，中华民族在本国疫情防控形势</td></tr>
</table>

	持续向好的同时，正以一个文明大国的姿态，协助多国抗击疫情，共克时艰，以实际行动诠释了携手构建人类命运共同体的深刻内涵，彰显了一个东方文明古国的历史担当。生命变量无处不在，我们就处在期间，而生命常量是我们自己，是我们应对生活的态度，是我们内在的常量，鼓励学生在家珍惜时间，并鼓励学生学好科学文化知识，为我国的科技发展做出自己的贡献。从“课程思政”的角度，让传统的数学知识焕发时代的色彩，实现从知识传授到价值塑造的升华。
教学实施过程	**1.1 教学背景** 本授课对象是非数学专业一年级本科生，学生已经具有一定的高等数学学习的基础，已经掌握了不定积分的计算。 在学习本节内容时，在学生了解微分方程的概念的基础上进行授课的。先用实例引入，然后介绍概念和求解的方法。因为本节内容比较简单，所以在讲解过程中，以学生自己探索、教师引导为主。在选择例题和习题时，力求做到既巩固前面学过的不定积分内容，又为后面的内容做铺垫。 **1.2 教学重点** 可分离变量的微分方程通解的求法。 **1.3 教学难点** 求可分离变量的微分方程通解中的不定积分计算 **1.4 教学方法** 通过实例先引出数学知识，接着帮助学生分析相应的数学知识，再引导学生用数学知识一步一步的解决实际问题。这样既能提高学生的学习兴趣，也能培养学生用数学知识解决问题的能力。 采用启发式和问题驱动为主的教学模式，由传染病问题导入新课，由浅入深，逐层深入的讲解可分离变量微分方程的求解，使学生掌握可分离变量微分方程的求解并应用。让学生通过学习，掌握事物发展规律，增强学生勇于探索的创新精神、善于解决问题的实践能力，帮助学生塑造正确的世界观、人生观和价值观，实现价值塑造、知识传授和能力培养的紧密结合。 **1.5 教学过程** **一、创设情境，课堂导入** 传染病经常在世界各地流行，如霍乱、天花、艾滋病、SARS、H5N1

病毒等。建立传染病的数学模型，分析其变化规律，防止其蔓延是一项艰巨的任务。下面仅就一般的传染规律讨论传染病的数学模型。

假设传染病传播期间其地区总人数不变，为常数 n。开始时染病人数为 x_0，在时刻 t 的健康人数为 $y(t)$，染病人数为 $x(t)$。由于总人数为常数，有

$$x(t)+y(t)=n.$$

（1）设单位时间内一个病人能传染的人数与当时的健康人数成正比，比例常数为 k，称 k 为传染系数，于是

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t\cdot x(t)}\cdot\frac{1}{y(t)}=k\Rightarrow\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=ky(t)x(t)$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=ky(t)x(t),x(0)=x_0.$$

（2）注意到（1），得

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=kx(t)(n-x(t)),x(0)=x_0. \qquad (3)$$

此模型称为 SI 模型，方程即为一阶常微分方程。

其中假设中单位时间内一个病人能传染的人数与当时的健康人数成正比，比例常数为 k。这样的假设与事实相符，也从科学的角度回答了传染病防疫隔离措施的科学性、重要性和急迫性。

【课程思政】

《高等数学》课程中“常微分方程及其求解”理论性强，抽象枯燥，少部分学生的基础薄弱，学习积极性不高，借助贴近生活实例，启发学生思考，引出可分离变量的微分方程的概念，实现高效的传递知识、技能和思想，调动学生学习积极性。

二、概念讲授，归纳方法

将这样一类方程单独抽离出来进行考虑，形成今天所要讨论的知识点——— 可分离变量的微分方程：

定义：可以写成 $g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$ 形式的一阶微分方程叫做可分离变量的微分方程。

等式的左边只和变量 y 相关，等式的右边只和变量 x 相关，这样的微分方程叫做可分离变量微分方程。

	引导学生推导可分离变量微分方程的求解方法： 第一步，分离变量： $$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$$ 第二步，两边积分：$\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$，则 $$G(y)=F(x)+C$$ 第三步，由 $G(y)=F(x)+C$ 确定的通解。 **【课程思政】** 科学猜想可以给我们探索未知提供重要的解题思路，由微积分中的不定积分公式，鼓励学生大胆猜想，然后证明推测，逐步找到解题方法。 **三、学以致用，求解计算** 例 1. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解。 解：若 $y=0$，则等式显然成立。 若 $y\neq 0$,分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$， 两边积分则 $\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int 2x\mathrm{d}x$，因此 $\ln\|y\|=x^2+C$， 则 $y=\pm\mathrm{e}^C\mathrm{e}^{x^2}$，其中 $\pm\mathrm{e}^C$ 为任意非零常数， 由于 $y=0$ 也是微分方程的解，所以微分方程的通解为 $y=C\mathrm{e}^{x^2}$ (C 为任意常数) 。 **【教学设计】** 在求方程的过程中注意引导学生思考，方程的 求解过程中，每一步不一定是同解变形，可能增解或减解. 接下来引导学生合作讨论，如果将方程改为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy^2$，在解的过程中学生会发现 y=0 也是该 微分方程的解，但是不包含在通解 $y=-\frac{1}{x^2+C}$ 中， 这说明微分方程的通解并不是微分方程的全部解。

例 2. 求微分方程 $xy'-y\ln y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=\mathrm{e}$ 的特解。

解：分离变量得 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\ln y=0$，$\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

两边积分得 $\int\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，

即 $\ln|\ln y|=\ln|x|+\mathrm{C}$，$|\ln y|=\mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{\ln|x|},\ln y=\pm\mathrm{e}^{C}|x|$.

因此 $\ln y=\mathrm{C}x$ (C 为任意非零常数)，由于 $y|_{x=1}=\mathrm{e}$，因此 C=1.

则 $\ln y=x$，即 $y=\mathrm{e}^{x}$。

例 3. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{p}(x)y$ 的通解。

解：若 y=0，则等式显然成立.

若 $y\neq 0$，分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=\mathrm{p}(x)\mathrm{d}x$，

两边积分得 $\ln|y|=\int\mathrm{p}(x)\mathrm{d}x+C$， 因此 $|y|=\mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{\int\mathrm{p}(x)\mathrm{d}x}$，

则 $y=\pm\mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{\int\mathrm{p}(x)\mathrm{d}x}$ ($\pm\mathrm{e}^{C}$ 为任意非零常数)，

由于 y=0 也是微分方程的解，

因此微分方程的通解为 $y=\mathrm{C}\mathrm{e}^{\int\mathrm{p}(x)\mathrm{d}x}$（C 是任意非零常数）。

最后引导学生用刚学的内容分组讨论，并解决本节课开始引入传染病问题，首尾呼应，巩固知识。

回看引例 求解 $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=kx(t)(n-x(t)),x(0)=x_0.$

解：此方程为可分离变量方程，得

$$\frac{x}{n-x}=\frac{x_0}{n-x_0}e^{nkt},$$

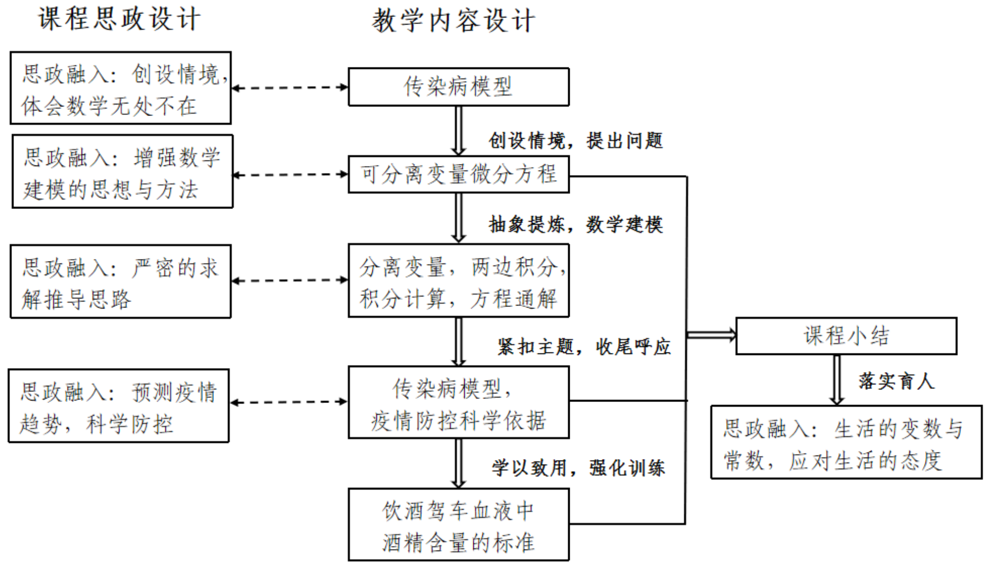
或 $x=\frac{n}{1+b\,e^{-nkt}}$，$b=\frac{n-x_0}{x_0}$.

通过传染病数学模型，可以看到传染病人的多少、易受传染者的多少

	是传染病传播过程中的重要因素。由此教育学生科学理性看待各项疫情防控措施，积极配合，严格执行。 这个模型可称为传染病模型。更一般地，由上式给出的函数的曲线称为逻辑斯谛曲线，用这种曲线描述的数学称逻辑斯谛模型。逻辑斯谛模型具有普遍意义。可分离变量微分方程中的很多数学模型，可揭示国民经济的快速发展，人口的发展，疾病的传播规律、生物种群的繁殖、信息的传播、新技术的推广等。 **【课程思政】** (1) 启发学生综合运用已学过知识和计算技巧探究实例的求解，明确求解思路和方法，最终提高学生分析和解决问题的能力； (2) 在教学过程中，使学生体会科学的发展离不开数学的精妙计算，对历史的探索，对未来的幻想都离不开数学模型的建立，加深对数学建模思想的感悟。 (3) 该模型有一个假设，即单位时间内一个病人能传染的人数与当时健康的人数呈正比，这样的假设与事实是相符的，同时也从科学的角度回答了传染病防疫隔离措施的科学性、重要性，这正好可以与新冠肺炎疫情防控期间采取的依法科学有序防控相一致，通过排查、隔离，遏制传播途径、缩小传播范围，通过大数据、健康码的应用，合理预测人员流动，准确分析疫情发展。通过模型以及传染病机理及预防知识的介绍，教育当代大学生要用科学的态度对待疫情，尊重科学，理性看待新型冠状病毒以及各项防疫措施。 此外，也可以将国外疫情防控措施与我国疫情防控措施进行对比，从而体现出我国在疫情期间全国人民上下凝聚起来抗疫的精神力量，展示中国精神和中国速度，从而增强学生的爱国意识。告诫学生疫情来势汹汹，任何一个人都无法独善其身，都需要肩负一份责任，引导青年学生勇于担当，增强其社会责任感。 **四、拓展应用，强化训练** 交通事故的主要责任者是机动车驾驶员。据专家的统计结果，在中国，交通事故每死亡三个人，有两个是违章驾驶。违章的原因主要有两个，一

	是超重、超载、超车，二是酒后驾车。国家质量监督检验检疫局2004年5月31日发布了新的《车辆驾驶人员血液呼气酒精含量值与检验》国家标准，新标准规定，车辆驾驶人员血液中的酒精含量大于或等于20毫克/百毫升，小于80毫克/百毫升为饮酒驾车。 有没有同学提出疑问，为什么饮酒驾车的标准是从车辆驾驶人员血液中的酒精含量大于或等于20毫克/百毫升开始的？ 大量的研究所提供的数据表明,汽车司机发生事故风险率 y(百分比)与其血液中的酒精浓度 x (百分比)有非常密切的关系. 假设事故风险率变化率与血液中的酒精浓度 x 的关系为: (1)已知数据点(0,1%),(14%,20%)，求事故风险率 y 与血液中酒精浓度 x 的函数关系 $y(x)$ (2)当血液中的酒精浓度是多少时,发生事故的风险率为 100%?四舍五入精确到百分位。 解： 依题意 $\frac{dy}{dx}=ky$ 这其实是可分离变量微分方程的求解 分离变量，$\frac{1}{y}dy=kdx$ 两边积分，$\int\frac{1}{y}dy=k\int dx$ 得， $ln\, y=kx+ln\, C=ln\, e^{kx}+ln\, C=ln\, Ce^{kx}$ 即 $y=Ce^{kx}$（C 是任意常数） 由已知数据点(0,1%),(14%,20%)代入得，$\begin{cases}Ce^{0}=0.01\\Ce^{0.14k}=0.2\end{cases}$，得 $\begin{cases}C=0.01\\k=21.4\end{cases}$ 即事故风险率 y 与血液中酒精浓度 x 的函数关系为 $y=0.01e^{21.4x}$ （2）要求血液中的酒精浓度是多少时，发生事故的风险率为100%， 令 $y=0.01e^{21.4x}=1$，得 $x=\frac{ln100}{21.4}=0.22=22\%$ 所以当血液中的酒精浓度是22%时,发生事故的风险率为100%. 这就解开了疑问。所以，请同学们谨记饮酒不开车，开车不饮酒！

	【课堂练习】 1.判断是否为可分离变量微分方程 （1）　$y^2+x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ （2）$y(1+x^2)y'-x\sqrt{1-y^2}=0$ **注解**：判断是否为可分离变量的微分方程是解题的前提条件，（1）为非可分离变量的微分方程，但是是奇次方程，留下疑问，为下一节的学习做好准备。 2.求解下列微分方程的通解 （1）$\dfrac{dy}{dx}=y\ln y;$　　（2）$\dfrac{dy}{dx}=e^{x-y}$； 3.求解下列微分方程满足初始条件的特解 （1）$\cos x\sin y dy=\cos y\sin x dx$，　$y\|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$ （2）$y'=y(y-1)$，　$y\|_{x=0}=1$ **【教学设计】** 　　通过练习题可以检测学生对知识的掌握情况，找到差距，更进一步巩固和深化新知识，让学生知道数学重在应用。 **五、课后作业，巩固提升** 　　作业布置分三块，基础题以巩固基础知识、基本定义，拓展题着眼生活实际，感受数学应用性。 **【课程思政】** 　　本堂课的教学设计首尾呼应，从计算传染病问题这一实际背景引入变量分离方程，重点讲授变量分离方程及其解法，然后应用所学数学知识解决问题，让学生切实感受常微分方程的根源深扎在各种实际问题之中。同时，拓展应用中酒驾问题给枯燥的数学课堂增加了趣味性，渗透思政，提升学生的安全意识。可变量分离方程课程思政设计和教学内容设计主体框架如图 1 所示。

	 图 1　可变量分离方程课程思政设计和教学内容设计主体框架
课程思政	微分方程单纯地用理论去讲 解概念和求解方法，学生不容易接受，本知识点采用以“案例式教学法”“问题教学法”“研讨教学法”等教学模式，引导学生在层层递进的问题中学习可分离变量微分方程的求解。本案例围绕“ 求解方程，传染病模型”主线，将抽象的概念融入生活案例中，培养学生的逻辑思维能力和数学素养及解决实际问题的能力，同时融入课程思政，将时事新闻、国情国策、爱国故事等成功地融入教学内容中，提高了学生的学习兴趣，培养学生的责任感、使命感，增强学生的爱国意识，课程思政实践效果评价良好，达到了预期的育人效果。 在拓展应用环节，由现实生活中饮酒驾车血液中酒精含量的标准问题启发学生数学建模，使学生掌握可分离变量微分方程的求解并应用。 微分方程可以进行变量分离，我们生活中的变量能否也全部分离呢？四季变化、险滩风浪，人生旅程的长途跋涉，我们不可能将所有遇到的变量全部分离。2020 年一场疫情突入其来，许多数学家纷纷利用数学模型来预测疫情的形势，为国家在疫情防控方面提供了很好的科学参考。数学模型是通过大量的实际数据，根据已有的数学知识建立，可以很好的体现数据变化，所以，建立一个传染病数学模型是非常重要的。在此节课结束之后，引导学生学习传染病模型的相关历史背景，本节课结合当下疫情发展的实际情况进行数学模型的建立和求解，将分离变量求解法渗透到模型的求解中，让学生体会充实践中抽象数学模型，再利用数学模型指导实践，培养学生用数学眼光观察现象的能力，又加深对所学知识的理解，同时也能将思政教育巧妙自然的融入，达到更好的学习效果。

	新冠严重威胁到全国人民的生命安全，是全社会面临的一次重大挑战。从全面暂停，到全面复工，国家面对疫情的态度，教会了我们：责任、担当、坚持、突破！中国对待疫情的态度和采取的举措展示了负责任大国的担当。