主题名称	不定积分	**相关知识点**	导数、微分
所属课程	高等数学	**授课时长**	1 学时，45 分钟
授课对象	大一经济类专业	**教学资源**	多媒体
参考教材章节位置	《高等数学及其应用》第二版 第 5 章 积分 5.2 节 微积分基本定理		

学情分析

不定积分是微积分的基本概念之一，是整个积分学的基础知识，是学习定积分和微分方程等内容的基础。不定积分是微分的逆运算，是学生学习高等数学要掌握的重点内容之一，也是难点之一。

教学目标

知识目标

(1)使学生明确认识和理解积分是微分的逆运算。

(2)使学生深刻理解原函数与不定积分的概念及它们之间的关系。

能力目标

(1)培养学生的观察、比较、类比、分析和抽象概括的能力和数学思维方法。

(2)提高学生提出问题、分析问题和解决问题的能力。

情感态度目标

(1)提高学生的学习热情，激发学生学习数学的兴趣。

(2)培养学生创新意识和勇于探索的精神。

教学重点

不定积分的概念。

教学难点

原函数与不定积分的关系。

教学方法

问题教学法、类比和化归学习法。

教学内容与过程

在前面学习中，我们通过求物体的运动速度，曲线的斜率，学习了导数和微分的概念。导数和微分以及导数的应用构成微分学。

已知速度求路程、已知切线求曲线以及求面积与体积等问题，产生了不定积分和定积分，构成积分学。

一、创设情境，兴趣导入（3 分钟）

【问题提出】已知作变速直线运动的质点运动规律为 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$，要求质点在 t 时刻的速度 $v(t)$？对 $s(t)$ 求导。

现实生活中，我们还碰到已知作变速直线运动的质点在 t 时刻的速度 $v(t)=gt$，求质点的运动规律为 $s(t)$？

解决这种已知一个函数的导函数，要反过来去求原来的函数的问题，就是导数的逆问题。这就是我们本节课要介绍的不定积分的概念。

设计意图：

通过设问，引入课题，让学生感性认识到我们将要解决的是导数的逆问题。

二、新旧结合，概念讲授（4 分钟）

【问题提出】那么什么是不定积分呢？我们先介绍下面的概念：

原函数的概念

设 $f(x)$ 是定义在空间 I 上的函数，若存在函数 $F(x)$ 使得对任何 $x\in I$ 均有 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$，则称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数。

原函数和导函数是一个等式所引发的两个不同方面的称呼而已。如：$(\sin x)'=\cos x$，那是不是说 $\cos x$ 是 $\sin x$ 的导函数，反过来，$\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数，再比如 $(3x)'=3$，3 是 $3x$ 的导函数，反过来 $3x$ 是 3 的原函数。比如我是大家的老师，大家是我的学生，咱们是师生关系。

设计意图：

培养学生观察能力、归纳总结能力和举一反三的能力。

三、连续启发，层层推进（10 分钟）

【提出问题】函数应具备什么条件才具有原函数？如果函数有原函数，那它的原函数有几个？是否唯一？如果原函数有很多个，那它们之间有什么关系吗？

【问题 1】函数具备什么条件下具有原函数？

原函数存在定理：

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内连续，那么在区间 I 内存在可导函数 $F(x)$，使 $\forall x \in I$，都有 $F'(x)=f(x)$。

设计意图：

培养学生的逻辑思维能力，使学们了解原函数的存在条件。

【问题 2】原函数是否唯一？

$(x^2)'=2x$，　$(x^2+1)'=2x$.显然，通过这个例子大家看到，x^2 和 x^2+1 都是 $2x$ 的原函数。原函数是不唯一的！

【问题 3】原函数既然不唯一，一共有多少个？若不唯一，原函数之间有什么关系？原函数是不唯一的！而且 $f(x)$ 有无穷多个原函数。

我们发现给一个任意的常数 C，$(x^2+C)'=2x$. 那么是不是就可以得到这样一个结果，

(1)若 $F'(x)=f(x)$，则对于一个任意的常数 C，$F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的原函数。

(2)若 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)-G(x)=C$。

设计意图：

培养学生的观察能力、总结归纳和逻辑推理能力. 为后面不定积分的定义理解打下基础。

不定积分的定义

设 $F(x)$ 是在区间 I 内的一个原函数，则 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x)+C$（C 是任意常数）称为 $f(x)$ 的不定积分，记作 $\int f(x)dx=F(x)+C$.

其中 $f(x)$ 被积函数；$f(x)dx$ 被积表达式；x 积分变量；C 积分常数；$\int$ 积分符号。

【知识拓展】积分符号 $\int$ 是将拉丁文中“Summa”的有一个字母“S”拉长得到的。发

明这个符号的人是德国数学家莱布尼茨。莱布尼茨在数学上，他和牛顿先后独立发现了微积分，莱布尼茨所发明的符号被普遍认为更综合，适用范围更加广泛。

【问题提出】如何求一个函数的不定积分？

四、拓展深化，强化训练（25 分钟）

例 1 求 $\int \cos x dx$

解： $(\sin x)' = \cos x$，$\therefore \int \cos x dx = \sin x + C$.

例 2 求 $\int e^x dx$

解： $\because (e^x)' = e^x$，$\therefore \int e^x dx = e^x + C$

例 3 求 $\int \frac{dx}{1+x^2}$

解： $\because (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$，$\therefore \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

【小结】由定义知，求函数 $f(x)$ 的不定积分，就是求 $f(x)$ 的全体原函数，在 $\int f(x) dx$ 中，积分号 $\int$ 表示对函数 $f(x)$ 实行求原函数的运算，故求不定积分的运算实质上就是求导(或求微分)运算的逆运算。

例 4 问 $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)$ 与 $\int f'(x)dx$ 是否相等?

解： 不相等。设 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = \frac{d}{dx}(F(x)+C) = F'(x) + 0 = f(x)$$

而由不定积分定义 $\int f'(x)dx = f(x) + C$，所以 $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) \neq \int f'(x)dx.$

【例题反思】本例题揭示了微分运算和积分运算之间的关系从某种程度上说是互逆的。

例 5 求不定积分 $\int x^3 dx.$

解： (1) 因为 $\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$,所以 $\frac{x^4}{4}$ 是 x^3 的一个原函数,从而 $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ (C 为任意常数)

例 6 已知曲线 $y = f(x)$ 在任一点 x 处的切线斜率为 $2x$，且曲线通过点(1, 2)，求此曲

线的方程。

解： 根据题意知 $f'(x)=2x$, 即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数，从而 $f(x)=\int 2xdx=x^2+C$

现在要上述积分曲线族中选出通过点 $(1,2)$ 的那条曲线.由曲线通过点 $(1,2)$ 得

$$2=1^2+C \Rightarrow C=1$$

故所求曲线方程为 $y=x^2+1$.

例 7 求函数 $f(x)=x^{\mu}$（$\mu\neq-1$）的不定积分.

解 由于 $(x^{\mu+1})'=(\mu+1)x^{\mu}$，所以根据导数的性质有 $(\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1})'=x^{\mu}$

因此 $\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}$ 为 x^{μ} 的原函数，于是所求不定积分为 $\int x^{\mu}dx=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C$.

由此我们可以由基本导数公式得到**基本积分公式。**

设计意图：

让同学们感受如何利用不定积分的定义本质，求解不定积分问题。

【问题提出】不定积分 $\int f(x)dx$ 的几何意义是什么？

不定积分 $\int f(x)dx$ 的几何意义是一族积分曲线（称为积分曲线族）。

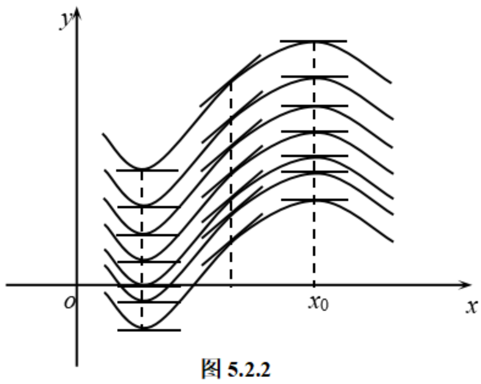

图 5.2.2

关于不定积分有下面基本性质：

性质 1 两个函数和的不定积分等于各个函数不定积分的和，即

$$\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$$

性质 2 不定积分中被积函数的非零常数因子可提到积分号的外面，即

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$$

五、小结概念，总结方法（3 分钟）

为了寻求导数的原来的函数，介绍了原函数的定义；要求所有的原函数，就是利

用不定积分的概念；并且发现所有的原函数的图形是一族平行的积分曲线。不定积分的本质是：求 $f(x)$的全体原函数。

【思考】 $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$；

【课后作业】课本 272 页　2,3,4

六、板书设计，条理清晰

1. 原函数的概念；
2. 不定积分的概念；
3. 不定积分的几何意义与性质。

教学总结

在教学过程中，巧妙的利用微分和积分之间的关系提出问题，激发学生兴趣，使学生了解本节课的主要任务. 根据学生的认知过程，提出三个问题，诱导学生积极探索，参与教学活动，培养学生观察、分析、比较和归纳能力，得出不定积分的定义、本质和计算思想。