<table>
<tr><td>主题名称</td><td>微积分第二基本定理</td><td>相关知识点</td><td>原函数、微积分第一基本定理</td></tr>
<tr><td>所属课程</td><td>高等数学</td><td>授课时长</td><td>1 学时，45 分钟</td></tr>
<tr><td>授课对象</td><td>大一国财务类专业</td><td>教学资源</td><td>多媒体</td></tr>
<tr><td>参考教材
章节位置</td><td colspan="3">《高等数学及其应用》第二版
第 5 章 积分
5.2 节 微积分基本定理</td></tr>
</table>

学情分析

微积分第二基本定理，或称为牛顿-莱布尼茨定理，是利用原函数计算定积分的一种便捷有效的方法。微积分第二基本定理在微积分发展史上具有里程碑的作用，它建立了被积函数和它的原函数之间的联系，架起了微分学和积分学之间的桥梁。

学生已掌握定积分的定义、性质，会利用定义求解简单的定积分，但是利用定义求积分计算量大，技巧性高，相对比较困难。是否能在已经学习的知识基础上，探求新的方法呢？目前，学生已掌握变上限积分函数的定义及性质，已学习了原函数存在定理，为本节课的知识点做好了铺垫。

本节课在此基础上，将困难的定积分求解问题转化为求被积函数在积分区间上的增量的问题，降低了学生求解定积分的难度。

教学目标

知识目标

掌握微积分第二基本定理及其证明，可以熟练使用该公式计算定积分。

能力目标

(1) 培养学生提出问题、分析问题和解决问题的思维方法；

(2) 引导学生发掘知识点间的联系，培养观察、比较、分析、转化、总结和抽象概括的数学能力。

情感态度目标

(1) 提高学生的学习热情，激发学生学习数学的兴趣；

(2) 培养学生的创新意识和勇于探索的精神；

(3) 通过讲解牛顿-莱布尼茨的历史故事，让学生感受数学的美妙，感受英雄人物

对于历史发展的重要推动作用。

教学重点

熟练掌握微积分第二基本定理及其运用。

教学难点

微积分第二基本定理的证明。

教学方法

1. 教师讲授和多媒体课件结合，利用多媒体课件中的文字、图片和动画将复杂知识直观化、形象化，便于学生理解和认识，并引起学生的学习兴趣；

2. 采用启发式教学法和问题驱动法，按照“提出问题、分析问题、解决问题”的思路来引导学生主动学习，培养学生独立思考和推导演绎能力；

3. 课堂教学辅以课后习题，使学生通过练习来掌握和巩固重点知识。

教学内容与过程

一、创设情境，兴趣导入（3 分钟）

通过生活或物理中实例，回顾定积分的定义，提高学生学习兴趣。

首先看四幅图片：

不规则图形的面积

汽车做变速直线运动的路程

吸出全部水所做的功

不均匀薄片的质量

四个看似截然不同的问题，却有着相同的数学模型--定积分。上节课，我们从物理与几何问题出发，引入了定积分的定义：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

例如，计算曲边梯形的面积，可以通过分割、近似替代、求和、取极限四个步骤。实际上，利用定义求定积分，计算量较大、技巧性很高。以计算 $\int_0^1 x^2 dx$ 为例（展示定义法求解定积分的过程），即使被积函数是一个基本初等函数，计算过程也是相当的繁琐。

【问题提出】定积分有没有比较简便的计算方法呢？

设计意图：

利用定积分的定义，仅能解决简单被积函数的定积分计算问题，但计算过程繁琐；而对复杂被积函数而言，运用定义计算定积分将变得更加困难甚至无法完成。为此，迫切需要寻找一种计算定积分的简便方法。

二、特例分析，层层启发（3 分钟）

引例　设某物体作变速直线运动，已知速度函数 $v(t)$ 和位置函数 S 均关于时间 t 非负连续，求该物体在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 经过的路程.

分析：考虑时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内物体所经过的路程。一方面由定积分的定义，路程 S 可以表示为 $S=\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$；

另一方面根据问题的实际意义，这个路程可以表示为 $S = S(T_2) - S(T_1)$。通过两种方法计算的同一个物理量必然是相等的，这样就得到了一个积分计算式。

解： $S=\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt = S(T_2)-S(T_1)$.

【问题提出】观察这个式子，有什么发现吗？

设计意图：

速度函数在一段时间间隔上的定积分用它的位置函数表示出来了。由导数的物理意义，位置函数 $S(t)$ 的导数恰好是速度函数 $v(t)$，说明位置函数 $S(t)$ 是速度函数 $v(t)$ 的一个原函数。也就是说，速度函数在一段时间间隔上的定积分表示成了它的

原函数在该积分区间上的增量。

三、总结规律，定理讲授（10 分钟）

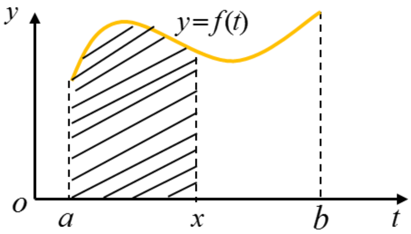
【问题提出】对于一般的可积函数 $f(x)$，它在某闭区间 $[a,b]$ 上的定积分是否可以表示为它的一个原函数在该区间上的增量呢？

定理：若 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个连续函数，且 $F'(x)=f(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。

注：微积分第二基本定理也称为微积分基本定理，或牛顿-莱布尼茨定理。公式 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ 称为牛顿-莱布尼茨公式。当 $a>b$ 时，公式仍然成立。

【分析】这个定理的证明，需要借助原函数存在定理。

原函数存在定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 区间连续，则变上限积分函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是被积函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 区间的一个原函数。



观察图形，得出变上限积分函数 $\Phi(x)$ 的两条性质：

(1)左端点 a 处　　$\Phi(a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$；

(2)右端点 b 处　　$\Phi(b)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$。

证：根据原函数存在定理和定理的已知条件，$f(x)$ 的两个原函数 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 和 $F(x)$ 之间只相差一个常数，满足 $\int_a^x f(t)dt=F(x)+C$。

令 $x=a$，则 $0=\int_a^a f(t)dt=F(a)+C$，得 $C=-F(a)$，从而 $\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$；

令 $x=b$，则上式即为 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\overset{\text{记作}}{=}[F(x)]_a^b=F(x)|_a^b$.

【发现】微积分基本公式表明：

1. 一个连续函数 $f(x)$ 在区间[a,b]上的定积分等于它在该区间上的任意一个原函数的增量；
2. 揭示了积分学两类基本问题——定积分与原函数之间的内在联系；
3. 求定积分问题转化为求原函数问题；

4. 为定积分的计算提供了一个普遍，有效，简便的计算方法。

【科普】这一公式在史书上有牛顿-莱布尼茨之争：

通过讲解他们的故事，让同学们深刻的体会**“虽然科学没有国界，但是科学家有祖国”**。后人在整理历史材料时发现，牛顿是从力学角度给出了这一结果，而莱布尼茨是从几何学的角度给出的，更加严密。为了纪念两位英雄人物，人们将这一发现命名为牛顿-莱布尼茨公式。我们现在使用的符号也是由莱布尼茨提出的，相较于牛顿的符号更为简洁。

设计意图：

通过讲解历史人物之间的故事，让同学们体会科学的发展的多么的伟大，感受英雄人物对于历史的重要推动作用。

四、拓展深化，强化训练（21 分钟）

例 1. 计算定积分 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

【分析】如何求被积函数的原函数呢？回顾求导的过程及公式：

原函数 $F(x)$	被积函数 $f(x)$
C	0
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x\ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

我们发现求积分与求导的顺序是相反的。也就是在已知导函数的前提下，求解原函数。本题中，被积函数是幂函数，所以我们要用的公式是 $(x^n)'=nx^{n-1}$。对应可以得到 $(x^3)'=3x^2$，最终得到 x^2 的原函数是 $\frac{x^3}{3}$。

解： $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}\times 1-\frac{1}{3}\times 0=\frac{1}{3}$

【小结】这个例题说明，微积分第二基本定理大大简化了定积分的计算手续，比采用定积分的定义，通过四个步骤进行计算的方法要简单得多。

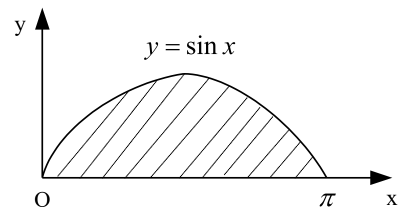
例 2. 计算 $\int_0^1 e^x dx$.

分析：由微积分第二基本定理，想要求一个定积分，先要求被积函数在该积分区间内的一个原函数。然后再求这个原函数在积分区间上的增量即可。显然，e^x 本身就是一个原函数，求它在端点处的函数值，作差即可。

解：原式 $= e^x\big|_0^1 = e-1$.

例 3. 计算正弦曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上与 x 轴所围成图形的面积。

解：　首先作出图形。



根据定积分的几何意义，所围成图形即以 $[0,\pi]$ 为底，以 $y=\sin x$ 为曲边的曲边梯形，其面积对应着下列定积分

$$A=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\big|_0^{\pi}==-[-1-1]=2\text{。}$$

【小结】利用微积分基本公式，将面积转化为被积函数的原函数在区间端点的增量。

【练习】求定积分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$.

设计意图：

通过练习，使学生体会并运用微积分第二基本定理求解定积分问题。

五、 连续启发，层层推进（5 分钟）

【问题提出】牛顿-莱布尼茨公式具有什么内在涵义呢？

经过推导得到：

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)=f(\xi)(b-a)=\int_a^b f(x)dx.$$

等式左边是微分中值公式，等式右边是积分中值公式。

【小结】牛顿-莱布尼茨公式不仅可以简化定积分的运算，而且将积分学与微分学中两个重要公式联系在了一起，促进了微积分的发展。

设计意图：

激发学生思考微积分的内涵，积分与微分之间的联系，培养学生的探究精神。

六、小结定理，总结方法（3 分钟）

微积分基本公式的发现、证明和应用，是人类思维史的一次伟大胜利，让人们不得不赞叹并折服于这一公式的伟大与巧妙。牛顿-莱布尼茨公式是联系不定积分与定积分的桥梁。

【思考】既然通过牛顿-莱布尼茨公式可以将定积分的计算转化为不定积分的计算，那么，我们之前学习过的不定积分的有效计算方法，如分部积分法、换元积分法等方法是否可以用来计算定积分呢？

【课后作业】　课本 272 页 2, 8, 9

【课外拓展】　收集牛顿和莱布尼茨的生平资料，以及他们创立微积分时所作的开创性工作？

七、板书设计，条理清晰

1. 微积分基本公式：$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$；
2. 两步计算法：先计算被积函数的原函数，再带入区间端点计算增量。

教学总结

本节课通过探究式的学习方法获得微积分第二基本定理的结论。引导学生从已有的知识上去大胆猜测定理的条件和结论，理解定理中的基本公式，探究被积函数与原函数之间的关系。通过例题，让同学们深刻体会公式法计算定积分较于定义法的简便和清晰。在讲授过程中，注重引导和总结，突出重点、突破难点，启发同学们对知识点的应用能力，尤其注重求导过程与积分过程之间的联系。

微积分第二基本定理是高等数学中的一个重点内容。首先，从生活实例中的曲边梯形，引出定积分的计算问题并以此为切入点；分析运用定义计算定积分这一方法的局限性，并以计算方法的寻找为中心；变换角度来考虑直线运动物体实例，大胆类推提出猜想；借助原函数存在定理，进行严格的理论证明，导出微积分第二基本定理。引导学生从实际问题出发，锻炼学生的逻辑思维能力、推导能力以及发现问题、解决问题的能力。

整个过程循序渐进，从已知推未知，从简单推复杂，为下个知识点做铺垫。在新知识的讲授过程中，不断启发学生深入思考，培养学生分析问题和解决问题的能力。通过培养学生解决问题的能力，达到“不教而会学”的目的，增强学生踏入社会之后

应对问题的能力。

讨论这一定理的命名特点，为什么称为牛顿-莱布尼茨公式？史书上记载，有著名的牛顿-莱布尼茨之争，他们争夺的正是微积分基本公式的创始人，之后演变为两国科学界的对抗。相对而言，莱布尼茨的表示方法更为简洁明了，但是英国数学界在很长时间内还使用的是牛顿的表示方法，这在一定程度上阻碍了英国数学的发展。虽说“科学没有国界，但是科学家有祖国”。经过后人的研究发现，牛顿是从力学角度创立了微积分，而莱布尼茨是从几何学角度创立了微积分，他们得到了相同的结论。后人为了纪念两位科学家的贡献，将这一公式命名为牛顿-莱布尼茨公式。他们的奉献精神值得我们去学习，他们的努力值得历史去铭记。

融入历史、数学大师和应用典范，让学生感受数学的研究背景和重大成就；巧设思考拓展，培养学生的创新意识与应用能力。