三、积分典型经济应用案例

积分在经济领域的核心应用逻辑是“导数与原函数的逆关系”，即通过边际函数（导数）求总函数（原函数），或通过速率函数求总量函数，适用于成本、收益、利润、产量、现金流等经济指标的累积效应计算。

二重积分在经济领域的应用核心是“二维变量下的密度-总量转化”，无论是收益密度、成本密度还是人口密度，均通过积分实现从“点”到“面”的总量计算，适用于平面区域内的经济总量评估。

案例一：由边际成本求总成本

问题背景

某电子设备制造厂生产某型号手机，通过成本核算发现，该产品的边际成本函数为 $MC(x)=0.003x^2 - 0.2x + 20$)（单位：元/部），其中 x 为产量（单位：部）。已知固定成本为 10000 元（即产量为 0 时的总成本），求该产品的总成本函数、平均成本函数，并计算产量为 100 部时的总成本和平均成本。

建模与求解

经济学中，边际成本是总成本对产量的导数，因此总成本函数是边际成本函数的不定积分，固定成本为积分常数，通过初始条件确定；平均成本函数为总成本函数除以产量。

求总成本函数：

由边际成本与总成本的关系可知，总成本函数 $C(x)$是边际成本函数 $MC(x)$的不定积分，即 $C(x)=\int MC(x)\,\mathrm{d}\,x+C_0$，其中 C_0 为固定成本（积分常数）。

计算不定积分：

$$\int(0.003x^2-0.2x+20)\,\mathrm{d}\,x=0.001x^3-0.1x^2+20x+C \text{（}C\text{ 为积分常数）。}$$

代入固定成本初始条件：当 $x=0$ 时， $C(0)=10000$ ，代入上式得 $C=10000$ 。因此，总成本函数为

$$C(x)=0.001x^3-0.1x^2+20x+10000\text{。}$$

求平均成本函数：

平均成本函数 $AC(x)$ 为总成本函数与产量的比值，即 $AC(x)=\frac{C(x)}{x}$。

代入总成本函数得：

$$AC(x)=\frac{0.001x^3-0.1x^2+20x+10000}{x}=0.001x^2-0.1x+20+\frac{10000}{x}\text{。}$$

计算产量为 100 部时的成本：

总成本：

$$C(100)=0.001\times100^3-0.1\times100^2+20\times100+10000=12000\text{（元）。}$$

平均成本：

$$AC(100)=0.001\times100^2-0.1\times100+20+\frac{10000}{100}=120\text{（元/部）。}$$

经济意义

总成本函数揭示了产量与总成本之间的量化关系，固定成本 10000 元是企业无论是否生产都需承担的成本（如设备折旧、厂房租金），可变成本部分 $0.001x^3 - 0.1x^2 + 20x$ 随产量变化而变化。当产量为 100 部时，总成本为 12000 元，平均成本为 120 元/部。企业可根据总成本函数制定生产计划，例如通过分析平均成本函数的最小值（求导找极值）确定最优产量，当

$$AC'(x)=0.002x-0.1-\frac{10000}{x^2}=0\text{，}$$

平均成本最低，此时的产量为最优生产规模。

案例二：由边际收益求总收益与总利润

问题背景

某服装品牌销售某款羽绒服，其边际收益函数为 $MR(x)$=150-0.2x （单位：元/件），其中 x 为销售量（单位：件）。已知该产品的总成本函数为 $C(x)$=50x + 8000（单位：元），求：（1）销售量从 100 件增加到 200 件时的总收益增量；（2）总收益函数和总利润函数；（3）销售量为多少时，总利润最大。

建模与求解

边际收益是总收益对销售量的导数，因此销售量从 a 到 b 的总收益增量为边际收益函数在[a,b]上的定积分；总收益函数为边际收益函数从 0 到 x 的定积分；总利润函数为总收益函数减去总成本函数，通过求导找极值确定利润最大化的销售量。

计算销售量 100 到 200 件的总收益增量：

总收益增量

$$\Delta R=\int_{100}^{200} MR(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{100}^{200}(150-0.2x)\,\mathrm{d}\,x 。$$

计算定积分

$$\int_{100}^{200}(150-0.2x)\,\mathrm{d}\,x=150x-0.1x^2\Big|_{100}^{200}=12000 \text{（元）。}$$

求总收益函数和总利润函数：

总收益函数

$$R(x)=\int_0^x MR(t)dt=\int_0^x(150-0.2t)dt=[150t-0.1t^2]_0^x=150x-0.1x^2$$

（销售量为 0 时总收益为 0，积分常数为 0）。

总利润函数

$$L(x)=R(x)-C(x)=(150x-0.1x^2)-(50x+8000)=-0.1x^2+100x-8000,$$

求利润最大化的销售量：

对总利润函数求导并令其为 0：$L'(x)=-0.2x+100=0$，解得 $x=500$（件）。

验证极值类型：二阶导数 $L''(x)=-0.2<0$，故 x=500 为极大值点，即利润最大化的销售量。

经济意义

（1）销售量从 100 件增加到 200 件时，总收益增加 12000 元，该结果可用于评估扩大销量的收益可行性。

（2）总收益函数呈二次函数形式，随销售量增加先增后减，当边际收益为 0 时 150-0.2x=0 ，即 x=750 件，总收益达到最大值。

（3）利润最大化的销售量为 500 件，此时总利润为

$$L(500)=-0.1\times500^2+100\times500-8000=17000 \text{ 元。}$$

企业可据此制定销售目标，当销售量低于 500 件时，增加销量可提高利润；高于 500 件时，增加销量会导致利润下降，需通过调整价格（影响边际收益函数）重新优化。

案例三：连续现金流的现值计算

问题背景

某投资公司计划投资一个长期稳定的基础设施项目，该项目投产后每年可产生稳定的现金流 30 万元，且预计该现金流将持续无限期（永续现金流）。已知市

场折现率为 5%（年利率，按连续复利计算），求该永续现金流的现值（即该项目的投资价值评估值）。若该项目的初始投资为 500 万元，判断该投资是否可行。

建模与求解

现金流的现值是将未来的现金流按折现率折算到当前的价值，连续复利下，时刻 t 的现金流 $f(t)$ 的现值为 $f(t)\mathrm{e}^{-rt}$ （r 为折现率）；永续现金流的现值为从 0 到无穷大的反常积分，通过反常积分收敛性判断并计算。

建立现值计算模型：

设每年现金流为 A=30 万元，折现率 r=5%=0.05，时刻 t 的现金流密度为 $f(t)=A=30$（万元/年，因现金流稳定）。

永续现金流的现值 $PV=\int_0^{+\infty}Ae^{-rt}dt$，该积分若收敛，其值为现值；若发散，说明永续现金流的现值无穷大（实际中因折现率存在，通常收敛）。

计算反常积分：

按反常积分定义计算：$PV=\lim\limits_{T\to+\infty}\int_0^T 30e^{-0.05t}dt$，

先计算定积分：

$$\int_0^T 30e^{-0.05t}dt=30\times\frac{e^{-0.05t}}{-0.05}\Big|_0^T=-600e^{-0.05t}+600,$$

求极限：

$$\lim_{T\to+\infty}(-600e^{-0.05T}+600)=\lim_{T\to+\infty}(-600e^{-0.05T})+600=600\text{（万元）},$$

积分收敛。

投资可行性分析：

项目现值为 600 万元，初始投资为 500 万元，因现值（600 万元）>初始投资（500 万元），该投资可行，预期可获得净现值 100 万元。

经济意义

永续现金流的现值计算是反常积分在投资价值评估中的典型应用，该模型突破了有限期现金流现值计算的局限，适用于基础设施、公益项目等长期稳定收益项目的评估。结果表明，该项目的永续现金流现值为 600 万元，高于初始投资 500 万元，具有投资价值。若折现率上升至 6%，则现值变为 $PV=\int_0^{+\infty}30e^{-0.06t}dt=500$ 万元，与初始投资持平，此时投资处于盈亏平衡状态；若折现率继续上升，现值

将低于初始投资，投资不可行，说明折现率（市场利率）是影响投资决策的关键因素。

案例四：消费者剩余与生产者剩余计算

问题背景

某地区苹果的市场需求函数为 P_d=10-0.01Q \)（ P_d 为需求价格，单位：元/千克； Q 为需求量，单位：千克），市场供给函数为 P_s=$2+0.01Q$ （ P_s 为供给价格，单位：元/千克； Q)为供给量，单位：千克）。求该市场的均衡价格、均衡数量，并计算均衡状态下的消费者剩余和生产者剩余。

建模与求解

市场均衡状态为需求量等于供给量，此时的价格和数量为均衡价格和均衡数量；消费者剩余是消费者愿意支付的最高价格与实际支付价格的差额总和，即需求曲线下方、均衡价格上方的面积，用定积分计算；生产者剩余是生产者实际获得的价格与愿意接受的最低价格的差额总和，即供给曲线上方、均衡价格下方的面积，同样用定积分计算。

求均衡价格和均衡数量：

均衡条件：$P_d = P_s$，即 10-0.01$Q = 2 + 0.01Q$ 。

解方程： $0.02Q = 8$ 得 Q=400 （千克），代入需求函数得均衡价格

P=10-0.01*400=6（元/千克）。

计算消费者剩余（CS）：

消费者剩余是需求曲线从 0 到均衡数量 Q=400 的积分减去均衡价格与均衡数量的乘积，即 $CS = \int_0^{400} P_d(Q)dQ - P \times Q$，

计算定积分：

$$\int_0^{400}(10-0.01Q)dQ = [10Q - 0.005Q^2]_0^{400} = 10\times 400 - 0.005\times 400^2 = 3200$$

（元），

计算消费者剩余： CS=3200 – 6*400=3200-2400=800（元）。

计算生产者剩余（PS）：

生产者剩余是均衡价格与均衡数量的乘积减去供给曲线从 0 到均衡数量 Q=400 的积分，即 $PS = P \times Q - \int_0^{400} P_s(Q)dQ$ 。

计算定积分：

$$\int_0^{400}(2+0.01Q)dQ=[2Q+0.005Q^2]_0^{400}=2\times400+0.005\times400^2=1600$$（元），

计算生产者剩余：$PS=6\times400-1600=800$（元）。

经济意义

市场均衡状态下，均衡价格为 6 元/千克，均衡数量为 400 千克，消费者剩余和生产者剩余均为 800 元，总剩余（消费者剩余+生产者剩余）为 1600 元，此时市场资源配置效率最高。消费者剩余反映了消费者获得的“额外收益”，即 800 元是消费者愿意为 400 千克苹果支付的最高总价格（3200 元）与实际支付总价格（2400 元）的差额；生产者剩余反映了生产者获得的“额外收益”，即 800 元是生产者实际获得的总价格（2400 元）与愿意接受的最低总价格（1600 元）的差额。若政府实施价格管制（如最高限价低于 6 元），会导致消费者剩余增加、生产者剩余减少，且总剩余下降（出现无谓损失）；若实施最低限价，则相反。

案例五：连续生产的总产量与平均产量计算

问题背景

某化工厂采用连续生产模式生产某化工原料，其生产速率（即边际产量）函数为 $r(t)=200+10t-0.5t^2$（单位：吨/小时），其中 t 为生产时间（单位：小时）。已知生产过程中当生产速率降为 0 时，需停止生产进行设备维护。求：（1）该设备的连续生产时间；（2）连续生产期间的总产量；（3）生产期间的平均生产速率（平均产量）。

建模与求解

生产速率（边际产量）是总产量对时间的导数，因此总产量为生产速率函数在生产时间区间上的定积分；生产时间由生产速率降为 0 的时刻确定；平均生产速率为总产量与生产时间的比值。

确定连续生产时间：

当生产速率 $r(t)=0$ 时停止生产，解方程\$200+10t-0.5t^2=0$ ，整理得

$t^2-20t-400=0$ 。

用求根公式解得：

$$t=\frac{20\pm\sqrt{400+1600}}{2}=\frac{20\pm\sqrt{2000}}{2}=10\pm10\sqrt{5}\,,$$

因时间为正，取正根$t=10+10\sqrt{5}\approx 10+22.36=32.36$（小时），即连续生产时间约为 32.36 小时。

计算总产量：

总产量$Q=\int_0^T r(t)dt$，其中$t=10+10\sqrt{5}$为生产时间，

计算不定积分：$\int(200+10t-0.5t^2)dt=200t+5t^2-\frac{1}{6}t^3+C$，

代入上下限 0 到 T 得：$Q=200T+5T^2-\frac{1}{6}T^3$，

将$T=10+10\sqrt{5}\approx 32.3607$，$200T\approx 6472.14$，$5T^2\approx 5\times 1047.197\approx 5235.985$，$\frac{1}{6}T^3\approx\frac{1}{6}\times 34088.9\approx 5681.48$，

故$Q\approx 6472.14+5235.985-5681.48\approx 6026.645$（吨）。

计算平均生产速率：

平均生产速率$\bar{r}=\frac{Q}{T}\approx\frac{6026.645}{32.3607}\approx 186.23$（吨/小时）。

经济意义

该设备的连续生产时间约为 32.36 小时，期间总产量约为 6026.65 吨，平均生产速率约为 186.23 吨/小时。生产速率函数 $r(t)=200+10t-0.5t^2$ 表明，生产初期速率随时间增加而上升（因设备处于升温期，效率提升），当 $t=10$ 小时时，生产速率达到最大值（$r(10)=200+100-50=250$ 吨/小时），之后速率逐渐下降，直至 32.36 小时时降为 0。企业可根据该结果制定生产计划，例如在生产速率最高的 10 小时前后安排高负荷生产任务，在速率下降阶段进行原材料补给等辅助工作；同时，32.36 小时的维护周期为设备维护计划提供了时间依据，确保生产效率最大化。

案例六：平面市场区域的总收益计算模型

问题背景

某电子产品企业在平面直角坐标系下的矩形市场区域 D 开展销售，区域 D 的范围为：横坐标 x（代表销售点到市中心的水平距离，单位：公里）满足 $0\leq x\leq 10$，纵坐标 y（代表销售点到市中心的垂直距离，单位：公里）满足 $0\leq y\leq 8$。

通过市场调研发现，该区域内任意销售点(x,y)的单位面积收益（即收益密度函数）为$f(x,y)=2000-10x-8y$（单位：元/平方公里），其中 x 和 y 越大，因远离市

中心导致运输成本上升，单位收益越低。求该企业在整个市场区域 D 的总收益。

建模与求解

总收益是收益密度函数在整个市场区域 D 上的累积，符合二重积分“密度函数在平面区域上的积分等于总量”的本质，因此建立二重积分模型计算总收益 R。

确定积分区域与积分限：区域 D 为矩形闭区域，积分变量 x 的范围是[0,10]，y 的范围是[0,8]，可采用直角坐标系下的累次积分计算，积分顺序可选择先对 y 积分再对 x 积分（或反之，结果一致）。

建立总收益积分表达式：

$$R=\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_0^{10}\int_0^8(2000-10x-8y)dydx$$

分步计算累次积分：

第一步：先对 y 积分，将 x 视为常数，计算内层积分

$$I(x)=\int_0^8(2000-10x-8y)dy$$

根据定积分基本公式计算：$I(x)=2000y-10xy-4y^2\Big|_0^8=15744-80x$

第二步：对 x 积分，计算外层积分 $R=\int_0^{10}(15744-80x)dx$

继续计算：$R=(15744x-40x^2)\Big|_0^{10}=153440$ 元。

经济意义

该企业在该矩形市场区域的总收益为 153440 元。二重积分在此处的核心作用是将“点层面的收益密度”转化为“面层面的总收益”，解决了二维区域内的总量核算问题。若企业想提高总收益，可根据收益密度函数 $f(x,y)=2000-10x-8y$，优先在 x 和 y 较小的市中心周边区域加大销售投入，或通过优化运输方案降低偏远区域（x、y 较大）的成本，提升该区域的收益密度。

案例七：生产要素组合的总成本计算模型

问题背景

某制造业企业生产某产品需投入两种生产要素：劳动力 L（单位：万人）和资本 K（单位：千万元），两种要素的投入组合需满足约束条件：$L\geq 0$，$K\geq 0$，且 $L^2+K^2\leq 25$（该约束源于企业的资源总量限制）。已知两种要素的联合成本密度函数为 $C(L,K)=12L+18K$（单位：百万元/（万人·千万元）），表示每组合 1 万人

劳动力和 1 千万元资本的成本。求该企业在满足资源约束条件下的最小总成本和最大总成本（即要素组合在可行域内的总成本范围）。

建模与求解

生产要素的可行域为平面直角坐标系中第一象限内的四分之一圆（$L^2+K^2\leq25$，$L\geq0$，$K\geq0$），总成本为成本密度函数在该可行域 D 上的二重积分。由于成本密度函数 $C(L,K)=12L+18K$ 是线性函数，其在有界闭区域 D 上的最值会在边界上取得，因此可通过极坐标变换简化积分计算（圆域更适配极坐标）。

坐标变换与积分区域转化：采用极坐标变换，令 $L=\rho\cos\theta$，$K=\rho\sin\theta$，其中 ρ 为极径，θ 为极角。根据约束条件 $L^2+K^2\leq25$，得 $\rho\in[0,5]$；因 $L\geq0$，$K\geq0$，得 $\theta\in[0,\pi/2]$。极坐标下的面积元素 $\mathrm{d}\sigma=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$。

转化成本密度函数与积分表达式：

$$C(\rho,\theta)=12\rho\cos\theta+18\rho\sin\theta=6\rho(2\cos\theta+3\sin\theta),$$

总成本

$$C=\iint_D C(L,K)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^5 6\rho(2\cos\theta+3\sin\theta)\cdot\rho d\rho d\theta$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta+3\sin\theta)d\theta\int_0^5\rho^2 d\rho,$$

分别计算两个单积分：

计算 ρ 的积分：

$$\int_0^5\rho^2 d\rho=\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^5=\frac{125}{3},$$

计算 θ 的积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta+3\sin\theta)d\theta=(2\sin\theta-3\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=5,$$

计算总成本：

C=6×5×(125/3)=6×(625/3)=1250（百万元）=12.5（亿元）。

最值分析：由于可行域是凸闭区域，成本密度函数是线性函数，总成本在可行域内为常数（因积分结果唯一），说明在该资源约束和成本密度下，无论要素组合如何调整（只要满足 $L^2+K^2\leq25$），总投入成本均为 12.5 亿元，企业可根据要素的边际产出效率选择最优的 L 和 K 组合（如边际产出高的要素可多投入）。

经济意义

二重积分在此处解决了“二维生产要素可行域内的总成本核算”问题，突破了单要素成本计算的局限。结果表明该企业的资源约束下总成本固定，为企业的要素组合决策提供了成本底线参考——企业无需担心成本波动，可聚焦于要素产出效率的优化，例如若劳动力边际产出高于资本，可增加 L 投入、减少 K 投入（如 L=5，K=0 时），反之则调整资本投入比例。

案例八：区域人口分布的消费总量评估模型

问题背景

某城市规划部门需评估某扇形区域的居民年消费总量，该区域 D 由极坐标方程 $\rho\leq10$（单位：公里）、$\theta\in[0,\pi/3]$（60°扇形）界定。通过人口普查数据，该区域内任意点(ρ,θ)的人口密度为$P(\rho,\theta)=5\rho$（单位：万人/平方公里），即离区域中心越远（ρ 越大），人口密度越高；同时，该区域内居民的人均年消费额为 $Q(\rho,\theta)=1.2 + 0.01\rho$（单位：万元/人），受距离中心的商业发达程度影响，ρ 越大人均消费略低。求该扇形区域的年消费总量。

建模与求解

消费总量=人口总量×人均消费，但由于人口密度和人均消费均随区域内位置(ρ,θ)变化，需先通过二重积分计算人口总量，再结合人均消费与位置的关系，通过二重积分计算“人口密度×人均消费”的累积量，即总消费额。

建立总消费积分模型：

总消费额$C=\iint\limits_D P(\rho,\theta)\times Q(\rho,\theta)d\sigma$，因区域为扇形，采用极坐标计算更简便，$d\sigma=\rho d\rho d\theta$，积分限 $\rho\in[0,10]$，$\theta\in[0,\pi/3]$。

代入函数并简化积分表达式：

$$P(\rho,\theta)\times Q(\rho,\theta)=5\rho\times(1.2 + 0.01\rho)=6\rho + 0.05\rho^2,$$

因此$C=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{10}(6\rho+0.05\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$。

分步计算积分：

计算 θ 的积分：$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{3}$，

计算 ρ 的积分：

$$\int_0^{10}(6\rho+0.05\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\theta=2\rho^3+0.0125\rho^4\Big|_0^{10}=2125\text{，}$$

计算总消费额：C=(π/3)×2125≈(3.1416/3)×2125≈1.0472×2125≈2225.3（万元）。

经济意义

该模型通过二重积分将“人口密度”和“人均消费”两个二维分布函数结合，精准计算了区域消费总量，为城市商业规划提供了数据支撑。结果显示该扇形区域年消费总量约 2225.3 万元，由于人口密度随 ρ 增大而提高，尽管人均消费略降，但整体消费重心偏向区域外围（ρ 较大处），因此规划部门可在 ρ=6-10 公里范围内布局大型商业综合体，更贴合消费总量的分布特征。