2016年天津市大学数学竞赛（经管类）试题

一、填空题（本题15分，每小题3分）

1. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^x-1}=2$，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$______.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(\cos t-e^{-\frac{t^2}{2}})dt}{x\tan(\sin^4 x)}=$______.

3. $x>0$时，使不等式$x-3\int_0^x e^{t^2-x^2}dt-Ae^{-x^2}\ge 0$恒成立的最大数A为______.

4. 设函数$y=y(x)$由方程组$\begin{cases}x=t^2+3t+2\\ y+e^y\sin t=1\end{cases}$所确定，当$t=0$时，$\dfrac{dy}{dx}=$______.

5. 设函数$f(x)$为$[-\pi,\pi]$上的奇函数，且具有任意阶的导数，若

$f^{(8)}(\pi)-f^{(6)}(\pi)+f^{(4)}(\pi)-f^{(2)}(\pi)+f(\pi)=4$，$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin xdx=1$，则

$\int_{-\pi}^{\pi}[f^{(8)}(x)+f^{(9)}(x)]\cos xdx=$______.

二、选择题（本题15分，每小题3分）

1. 设函数$f(x)=(e^x-1)|x^3+x^2-2x|$，其不可导点的个数为（　）

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

2. 二元函数$z=f(x,y),(x,y)\in D$，考察以下结论：

(a) $f(x,y)$在D上偏导数存在，则$f(x,y)$在D上连续

(b) $f(x,y)$在D上偏导数存在，则$f(x,y)$在D上可微

(c) $f(x,y)$在D上可微，则$f(x,y)$在D上连续

(d) $f(x,y)$在D上可微，则$f(x,y)$在D上偏导数存在

完全正确的是（　）

(A) a, c　(B) b, c　(C) a, b　(D) c, d

3. 可微函数$z=f(x,y)$的微分为$dz=xy(8-3x-2y)dx+x^2(4-x-2y)dy$，则（　）

(A) $f(2,1)$为极小值　(B) $f(2,1)$为极大值

(C) $f(2,1)$ 不是极值　　(D) 无法判断 $f(2,1)$ 是否是极值

4. 设 $f(u)$ 为连续函数，$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$（其中$R$为大于零的常数），则二重积分 $I=\iint\limits_D[x^2+xyf(x^2+y^2)]dxdy$ 值为（　）

(A) $\frac{1}{4}\pi R^4$　　(B) 1　　(C) 与函数 $f(u)$ 相关的值　　(D) 0

5. 累次积分 $\int_0^4 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{4}{\sin\theta-\cos\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 可以写成（　）

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^2 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{4}{\sin\theta-\cos\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^4 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_0^{2\sqrt{2}}dr\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta$

(C) $\int_{-4}^4 dx\int_{x+4}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy$

(D) $\int_0^4 dy\int_{y-4}^0 f(x,y)dx+\int_0^4 dy\int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(y,x)dx$

三、（6分）

确定常数 a，b，使当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ 为 x 的尽可能高阶的无穷小量.

四、（6分）

设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，且当 $x\ge 0$ 时，$f'(x)(1+x^2+f^2(x))-1=0$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

五、（6分）

设空间曲面 S：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{8}=1$ 与平面 $\prod$：$x+y+2z=0$ 的交线为空间曲线 C，求曲线 C 上任意一点 (x_0,y_0,z_0) 的切线方程.

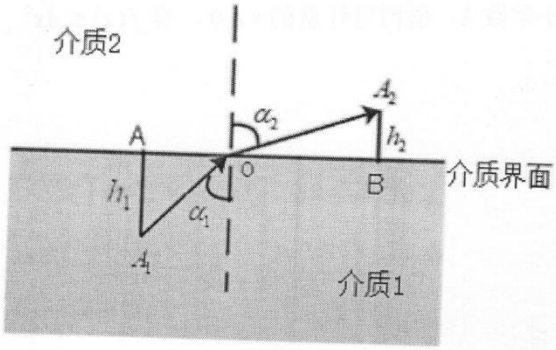
六、（6分）

设函数 $f(x)=k\ln x-x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 有且仅有一个零点，求 k 的取值.

七、（7 分）

费马原理：在任意两点之间，光线所走的实际路径是耗费时间最少的路径. 如图所示. 光线从介质 1 中的 A_1 点经折射到达介质 2 的 A_2 点. 证明折射定律：

$\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$，其中 c_1 与 c_2 分别为光线在介质 1 和介质 2 中的传播速度，α_1 为入射角，α_2 为折射角.



八、（7 分）

设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2(\sqrt{1+\dfrac{x}{t}}-1)[u(x+\dfrac{1}{t})-u(x)]$，其中函数 $u(x)$ 满足

$\int\dfrac{1}{x}u'(\ln x)dx=x^2+C$（其中 C 为任意常数），求 $\int_0^1 f(x)dx$.

九、（7 分）

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，

$f''(0)\neq 0$，问是否存在唯一的一组实数 λ_1，λ_2，λ_3，使当 $x\to 0$ 时，

$\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f(2x)+\lambda_3 f(3x)-f(0)$ 是较 x^2 的高阶无穷小量？若存在，请求出.

十、（7 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，对任意常数 $\lambda\in R$，$\int_a^b e^{\lambda x}f'(x)dx=0$ 且

$e^{\lambda a}f(a)=e^{\lambda b}f(b)$，证明：存在 $\eta\in[a,b]$，使 $f(\eta)(e^{\lambda b}-e^{\lambda a})=0$

十一、（8 分）

计算 $\iint_D \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}{1+\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}}dxdy$，其中 D 是由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

十二、（10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶连续可导，且 $f(0)=f'(0)=0$. 并满足

$xf''(x)+3x(f'(x))^2=1-e^{-x}$，求最小常数 A，使得对任意的 $x\geq 0$，有 $f(x)\leq Ax^2$

2017年天津市大学数学竞赛（经管类）试题

一、填空题（本题15分，每小题3分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n+\frac{1}{n}}+\dfrac{e^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{e}{n+1}\right)=$______.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\ln(1+x)}{1-\cos\sqrt{1-\cos x}}=$______.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha x^2}}{e^{\alpha x}}=\sqrt{e}$，则 $\alpha=$______

4. 设函数 $f(x)=(1+x)^2\arctan x$，则 $f^{(50)}(0)=$______.

5. 已知 $\int_0^x xf(t-x)dt-\int_0^{-x}tf(t)dt=\int_0^x e^{t^2}dt$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$______.

二、选择题（本题15分，每小题3分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则以下结论不正确的是（　）

(A) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_0^x f(x)dx$ 为奇函数

(B) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_0^x f(x)dx$ 为偶函数

(C) 若 $f(x)$ 为 $T(T\neq 0)$ 周期函数，则 $\int_0^x f(x)dx$ 为T周期函数

(D) 若 $f(x)$ 为 $T(T\neq 0)$ 周期函数，则 $\int_0^x f(x)dx$ 不一定为T周期函数

2. 设函数 $y=f(x)$ 满足方程 $y^{(n)}+a_n(x)y^{(n-1)}\cdots+a_2(x)y'+a_1(x)y+a_0(x)=0$，若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$V=a_1(x_0)f(x_0)+a_0(x_0)$，则正确的是（　）

(A) 若n为奇数且 $V\neq 0$，则 x_0 点为极值点

(B) 若n为奇数且 $V=0$，则 x_0 点为极小点

(C) 若n为偶数且 $V\neq 0$，则 x_0 点为极值点

(D) 若n为偶数且 $V>0$，则 x_0 点为极小值点

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且单调非增，对 $b>a>0$，则一定有（　）

(A) $a\int_0^b f(x)dx \ge b\int_0^a f(x)dx$　(B) $a\int_0^b f(x)dx > b\int_0^a f(x)dx$

(C) $a\int_0^b f(x)dx \le b\int_0^a f(x)dx$　(D) $a\int_0^b f(x)dx < b\int_0^a f(x)dx$

4. 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导，且$f(a)f(b)<0$，$f'(a)f'(b)<0$，则（ ）

(A) 存在$\xi_1\in(a,b)$，使$f(\xi_1)=0$；不一定存在$\xi_2\in(a,b)$，使$f(\xi_2)=0$

(B) 不一定存在$\xi_1\in(a,b)$，使$f(\xi_1)=0$；存在$\xi_2\in(a,b)$，使$f(\xi_2)=0$

(C) 不存在$\xi_1\in(a,b)$，使$f(\xi_1)=0$；存在$\xi_2\in(a,b)$，使$f(\xi_2)=0$

(D) 存在$\xi_1\in(a,b)$，使$f(\xi_1)=0$；存在$\xi_2\in(a,b)$，使$f(\xi_2)=0$

5. 设$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}dx$，则正确的是（ ）

(A) $I_1>I_2>1$　(B) $I_2>I_1>1$　(C) $1>I_2>I_1$　(D) $1>I_1>I_2$

三、（6分）

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(\arcsin x)-\arctan(\arctan x)}{\arcsin x-\arctan x}$

四、（6分）

求常数a, b之值，使得函数

$$f(x)=\begin{cases} ax+b\cos x, x\le 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\cos\dfrac{x}{n}+\cos\dfrac{2x}{n}+\cdots+\cos\dfrac{(n-1)x}{n}-nx\right), x>0 \end{cases}$$

在$x=0$处可导

五、（6分）

计算$\int\dfrac{e^{\sin x}\left(x\cos^3 x-\sin x\right)}{1+\cos 2x}dx$

六、（7分）

有一平底容器，侧面由一平面曲线$x=f(y), y>0$绕y轴旋转而成，容器底面半径为r米，根据实际要求，当以每分钟a立方米的速度向空容器内注入液体时，液面将以每分钟b平方米的速度均匀扩大.

1. 给出$f(y)$与时间t的关系

2. 求曲线$x=f(y), y>0$的方程

七、（7分）

求空间曲面 $z = y\sqrt{16-x^2}$， $x^2+y^2-4x=0$， $y^2-4x=0$ 与空间平面 $z=0$， $x=4$ 在坐标系 $o-xyz$ 第一卦限所围立体的体积.

八、（7分）

设函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上连续，且 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 0$， $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = 0$，证明：在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1， ξ_2 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$

九、（7分）

已知 $3\ln^3 3 - 6 < 0$，证明 $x^3 + 2 > 3^x > x^3 + 1, x \in (0,1)$

十、（7分）

已知圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 含在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 内，问 a， b 取何值时，此椭圆的面积最小，并求出此时的椭圆方程和椭圆面积.

十一、（8分）

设连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{3}{8}x\iint_{D_1} f(x,y)dxdy - \frac{2}{\pi}y\iint_{D_2} f(x,y)dxdy$，

其中 $D_1 = \{(x,y)\,|\,-1 \le x \le 1.-1 \le y \le 1\}$， $D_2 = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 1\}$，求 $f(x,y)$ 在 $x^2 + y^2 \le 1$ 上的最值.

十二、（8分）

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x) > 0$， $\lim_{x \to a^+} \frac{\sqrt{1+f(x)}-1}{x-a}$ 存在，

证明：

（1） $f(x) > 0, x \in (a,b)$

（2）在 (a,b) 内存在两个相异的点 ξ_1、ξ_2，使等式 $\frac{b^3-a^3}{\int_a^b f(x)dx} = \frac{3\xi_1^2}{f'(\xi_2)(\xi_1 - a)}$ 成立.

2018 年天津市大学数学竞赛（经管类）试题

一、填空题（本题 15 分，每小题 3 分， 请将最终结果填在相应的横线上面）

1. 设$1<x<2$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{2n}}=$______.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\ln(1+\sin x\tan x)}=$______.

3. 已知$\int f(x)dx=x^2+C$，则$\int xf(1-x^2)dx=$______.

4. 设 $f(x,y)$ 具有连续的偏导数，$g(x)$ 和 $h(x)$ 都连续可导，

$z=f\left(xy,g\left(\dfrac{y}{x}\right)+h(xy)\right)$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.

5. $f(x)=\begin{cases}|x|,|x|\le 1\\ 1,|x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}|x-1|,|x-1|\le 1\\ 1,|x-1|>1\end{cases}$，则$\int_{-3}^{3}\left(f(x)+g(x)\right)dx=$______.

二、选择题（本题 15 分，每小题 3 分。每个小题的四个选项中仅有一个是正确的，把你认为“正确选项”前的字母填在括号内，选对得分；选错、不选或选出的答案多于一个，不得分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & 若x为有理数\\ 0 & 若x为无理数\end{cases}$，$g(x)=f\left(x\left(1-x^2\right)\right)$，则 $g(x)$ 所有的连续点为（ ）

(A) 0　(B) 0，−1，+1　(C) 0，+1　(D) −1，+1

2. 二阶连续可导的函数 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值的充分条件是（ ）

(A) $f'(x_0)=0,f''(x_0)<0$　(B) $f'(x_0)=0,f''(x_0)>0$

(C) $f'(x_0)=0,f''(x_0)=0$　(D) $f'(x_0)=0,f(x_0)>0$

3. 当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x (x-t)\sin t^2dt$ 与 $\dfrac{c_4x^4+c_3x^3+c_2x^2+c_1x}{12}$ 是等价无穷小量，则正确的是（ ）

(A) $c_4=0,c_3=0,c_2=0,c_1=1$　(B) $c_4=0,c_3=0,c_2=1,c_1=0$

(C) $c_4=0,c_3=1,c_2=0,c_1=0$　(D) $c_4=1,c_3=0,c_2=0,c_1=0$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 有一阶连续的导数，则下面说法正确的是（ ）

(A) 若 $f'(x)$ 变号，则 $f(x)$ 也变号

(B) 若 $f'(x)$ 不变号，则 $f(x)$ 也不变号

(C) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ ，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 有界

(D) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=1$ ，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 无界

5. 设 $D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le\dfrac{\pi}{2},0\le y\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$，则 $\iint\limits_D|\cos(x+y)|\,dxdy=$（ ）

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)dy\right)dx$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{x}\cos(x+y)dy\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_x^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)dy\right)dx$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)dy\right)dx$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{x}\cos(x+y)dy\right)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_x^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)dy\right)dx$

三、（本题 6 分）求积分

计算 $\displaystyle\int\frac{3dx}{x^{16}\left(1+x^6\right)}$

四、（本题 6 分）

证明不等式 $\displaystyle\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\le\int_0^1\frac{1}{1+x^2+8x^4\left(1-x^4\right)}dx\le\frac{\pi}{4}$

五、（本题 6 分）

计算 $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!(k+2)}$

六、（本题 7 分）

求曲面 $(x+y)^2+(x-y)^2+z^2=1$ 上到平面 $x+y+z=5$ 之间距离最短和最大的点的坐标和相应的距离

七、（本题 7 分）

证明不等式 $e^x + e^{-x} \ge 2 + x^2$

八、（本题 7 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[1,5]$ 连续可导，且 $f(1)f(5) < 0$，$f'(x) > 2f(x)$，证明方程 $f(x) = 0$ 在 $[1,5]$ 有且仅有一个根.

九、（本题 7 分）

计算 $\int_3^5 \frac{\sqrt{\ln(12-x)}}{\sqrt{\ln(12-x)} + \sqrt{\ln(4+x)}} dx$

十、（本题 8 分）

曲线 $y = x^2 + 1$ 上一点 $A(3,10)$ 的切线 L 与该曲线及 y 坐标轴围成平面图形 D，求 D 绕 x 轴旋转所得到的体积.

十一、（本题 8 分）

设函数 $y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续可导，且满足 $y(x) + \int_0^x \left(y(t) + \frac{1}{1+t^2+t^{2018}} - 1 \right) dt = 0$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$

十二、（本题 8 分）

某公司第 n 年获得的利润 x_n 满足 $x_1 = 2$，$x_2 = 3$，$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n}\,(n = 1,2,3,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

2019 年天津市大学数学竞赛（经管类）试题

一、填空题（本题 15 分，每小题 3 分， 请将最终结果填在相应的横线上面）

1. 设 D 为正方形区域 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$，则 $\iint_D \max\{2x, y\} dxdy =$______.

2. 设函数 $f(x)$ 任意阶连续可导，且满足 $f(x)+\frac{1}{3}f(2x)=\frac{5}{3}x+\frac{11}{3}x^3$，则

$f(x)=$______.

3. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x^2-t^2)e^t \sin t^2 dt}{x^k}=c(c\ne 0)$，则 k=______.

4. 已知 $f(u,v)$ 具有连续的偏导数，满足 $f(0,0)=1$，$\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}+\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}=\dfrac{u+v}{2}$，

设 $y(x)=e^x f(x,x)$，则 $y(x)=$______.

5. 定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx=$______.

二、选择题（本题 15 分，每小题 3 分。每个小题的四个选项中仅有一个是正确的，把你认为"正确选项"前的字母填在括号内，选对得分；选错、不选或选出的答案多于一个，不得分）

1. 当 x>0 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(x-1)^{n+3}+x^2+|x-1|+2}{2+(x-1)^n}$，则（ ）式成立

(A) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}, f(3)=8$　　(B) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{8}, f(3)=8$

(C) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{8}, f(3)=\frac{13}{2}$　　(D) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}, f(3)=\frac{13}{2}$

2. 设 $f(x)$ 可导，$G(x)=(f(x)+2)(1+e^{-x}+|x|)$ 在 x=0 可导，则下面结果正确的是（ ）

(A) $f(0)=-2$　(B) $f(0)=-1$　(C) $f(0)=0$　(D) $f(0)=1$

3. 设 $0<c<2$，$f(x)>g(x)>0$，$f(x)$ 和 $g(x)$ 连续，则下面不等式成立的是（ ）

(A) $\int_1^c f(x)dx \ge \int_1^c g(x)dx$　(B) $\int_1^c f(x)dx \le \int_1^c g(x)dx$

(C) $\int_c^2 f(x)dx \ge \int_c^2 g(x)dx$　(D) $\int_c^2 f(x)dx \le \int_c^2 g(x)dx$

4. $f(x)$二阶可导，且满足$(f'(x))^3+2f'(x)+(x_0-x)e^{-x}=0$，则下面结论正确的是（ ）

(A) x_0是$f(x)$的拐点　　(B) x_0不是$f(x)$的极值点

(C) x_0是$f(x)$的极大值点　　(D) x_0是$f(x)$的极小值点

5. 当$x\neq 1$时，$f(x)=\dfrac{(x-1)(1-g(x))}{1+g(x)}$，而当$x=1$时，$f(x)=0$，其中$g(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$，则（ ）式成立

(A) $f(x)$在$x=1$连续　　(B) $f(x)$在$x=1$不连续

(C) $f(x)$在$x=1$可导　　(D) $f(x)$在$x=1$连续可导

三、（本题6分）

设函数$y=f(x)$由方程$y=F(x,z)$和$G(x,y,z)=0$所确定，其中函数F和G连续可导，且满足$\dfrac{\partial G}{\partial z}\neq 0$，$\dfrac{\partial G}{\partial z}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial G}{\partial y}\neq 0$，求$\dfrac{dy}{dx}$

四、（本题6分）

计算重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 3y}\sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$

五、（本题6分）

证明不等式$\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}\leq\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2+8x^4\left(1-x^4\right)}dx\leq\dfrac{\pi}{4}$

六、（本题7分）

设$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^2+2}{n!}(x-3)^n$，请给出$f(x)$的表达式

七、（本题7分）

求极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\dfrac{n(1+x^7)}{n^2x^2+1}dx$

八、（本题7分）

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$二阶连续可导，且$f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f(x)dx=0$。证明

有$\xi \in (a,b)$，使得$f''(\xi) = f'(\xi)$

九、（本题 7 分）

过点$P(3,2,0)$做曲面$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$的切平面，求该曲面在第一卦限的切点与$P(3,2,0)$点连线中点所形成曲线的参数方程

十、（本题 8 分）

半径为 R、比重为$\mu(\mu>1)$的均匀球体位于水面之下，球心距水面 2R，若将该球体移到球心在水面之上 2R 的距离，求此过程中所作的功.

十一、（本题 8 分）

求平面圆盘$(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2 \le 1\left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$绕着 y 坐标轴旋转得到的体积.

十二、（本题 8 分）

设序列x_n满足$x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{ax_n}{1+x_n}$，a 为正常数，讨论$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

2021 年天津市大学生数学竞赛试题（经管类）

一、填空题（本题 15 分，每小题 3 分．请将最终结果填在相应的横线上面.）

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin x}(x-t)\cos t^2\,dt}{\int_0^{x} x\cos(x-t)^2\,dt}=$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\left(\sqrt{8+x^{10}}+\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)dx=$

4. $\int_0^{10\pi} x\left|\cos x\right|dx=$

得分	评卷人	复核人

二. 选择题（本题 15 分，每小题 3 分. 每个小题的四个选项中仅有一个是正确的，把你认为“正确选项”前的字母填在括号内. 选对得分；选错、不选或选出的答案多于一个，不得分）

1. 设$f(x)$在$[2,+\infty)$连续可导，则当

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$时，$f(x)$在$[2,+\infty)$无界；

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\neq0$时，$f(x)$在$[2,+\infty)$有界；

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=-1$时，$f(x)$在$[2,+\infty)$有界；

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=1$时，$f(x)$在$[2,+\infty)$无界；

2. 函数$\dfrac{\left(|x|^x-1\right)\left(|x|-1\right)}{x(x+1)(x+2)\ln|x|}$可去间断点有

(A) 1个；　(B) 2个；　(C) 3个；　(D) 0个。

3. 设　$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le0,\\ x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$　则下面说法错误的是

(A) $f(x)$在 x=0 连续；　(B) $f(x)$在 x=0 可导；

(C) $f(x)$在 x=0 二阶可导；　(D) $f(x)$在 x=0 二阶不可导。

4. 设 $f(x)$二阶连续可导，且 $f''(x)<0$，$g(x)=(1-x)f(0)+xf(1)$，

则当$0<x<1$时

(A) $f(x)-g(x)\geq 0$; (B) $f(x)-g(x)\leq 0$;

(C) $f(x)-g(x)=0$; (D) $f(x)-g(x)$变号。

5. 已知 $f(x)=e^{x^2}\cos\frac{\pi x^2}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1-\sin x)}{x}=$

(A) $2\pi e$; (B) $-2\pi e$; (C) π; (D) e.

三.（本题 6 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{x}}+2020}{2021}\right)^{\frac{x}{\ln x}}=$

得分	评卷人	复核人

四.（本题6分）

计算不定积分 $\int\max\{x,\sin x\}dx$

五.（本题 6 分）

设 $u(x,y)$二阶连续可导，令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,

求 $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$

六.（本题 7 分）

计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\rho^2\sin\theta\sqrt{1-\rho^2\cos 2\theta}\,d\rho\right)d\theta$

七. (本题 7 分)

设 n 是自然数，a_n 是方程 $x^n+3nx-1=0$ 的正根，求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+a_n)^n=$

八. (本题 7 分)

计算定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{1+3x^2+5x^4}{1+2^x}dx=$

九. （本题 7 分）

过点 $P(0,3)$ 做曲线 $9x^2+4y^2-54x+45=0$ 的两条切线，求这两条切线和该曲线短的弧段所围成图形的面积。

十. （本题 8 分）

证明不等式 $\frac{95\pi}{357}\le\iint_{x^2+y^2\le1}\sin\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^5}\,dxdy\le\frac{2\pi}{7}$

十一. （本题 8 分）

分别求平面上的椭圆 $(x-a)^2+\frac{y^2}{b^2}=1$ 当 $a=2$ 和 $a=\frac{1}{2}$ 时绕 y 坐标轴旋转所得到旋转体的体积，其中 $b>0$。

十二. （本题 8 分）

已知数列 $\{x_n\}$ 的各项满足，$x_{n+2}=\frac{3x_{n+1}}{4}+\frac{x_n}{4}+\frac{1}{2^n}$，$n=1,2,\ldots$，且 $x_1=2$，$x_2=1$，求该数列的极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

2023年天津市大学数学竞赛试题
（经管类）

本试卷共12页，十二大题，考试时间为150分钟，满分100分.

总　分		题 号	一	二	三	四	五
核分人		题 分	15	15	6	6	6
复查人		得 分					
题　号	六	七	八	九	十	十一	十二
题　分	6	7	7	7	7	8	10
得　分							

得分	评卷人	复核人

一. 填空题（本题15分，每小题3分. 请将最终结果填在相应的横线上面.）

1. 设经济中的生产函数为$Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$，其中Q是产量，A是技术进步因素，L是劳动变量，K是资本变量. α，β均为大于零的常数，则劳动产出弹性

$E_L=$__________.

2. 设$f(x)$在$x=18$的邻域内可导，且$\lim\limits_{x\to18}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to18}f'(x)=674$

$$\lim_{x\to18}\frac{\int_{18}^{x}\left[t\int_{t}^{18}f(u)du\right]dt}{(18-x)^3}=\underline{\qquad\qquad}.$$

3. 设$f(x)=x^2\sin x$，则$f^{(n)}(x)=$__________.

4. 已知$f(x)$的一个原函数为$(1+\sin x)\ln x$，$\int xf'(x)dx=$__________.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=$__________.

得分	评卷人	复核人

二. 选择题（本题 15 分，每小题 3 分. 每个小题的四个选项中仅有一个是正确的，把你认为"正确选项"前的字母填在括号内. 选对得分；选错、不选或选出的答案多于一个，不得分.）

1. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，其中$\varphi(0)=0$，$\varphi'(0)=0$，$\varphi''(0)=10$，则$f(x)$在$x=0$处（　）

(A) 导数不存在.　　(B) 不连续.

(C) 可导, 且$f'(0)=5$.　　(D) 可导, 且$f'(0)=10$.

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$，则$f(x)$在$x=0$处（　）

(A) 连续且取到极大值.　　(B) 连续且取到极小值.

(C) $f(x)$不连续.　　(D) 没有极值.

3. 设函数$f(x,y)$可微, 且$f(x+1,e^x)=x(1+x)^2$，则$df(1,1)=$（　）

(A) dy.　　(B) $dx+2dy$.

(C) $dx-dy$.　　(D) $dx+dy$.

4. 设$f(x)=g(x)=\begin{cases}a & 0\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$，$D=\{(x,y)|-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$，其中$a>0$，$\iint\limits_D f(y-x^2)g(x)dxdy=$（　）

(A) 0.　(B) a^2.　(C) a.　(D) $-a$.

5. 已知$f(x)$以3为周期，且$f(x)$在$x=0$处可导，并满足：$f(\sin x)-3f(-\sin x)=8\sin x+\alpha(x)$，其中$\alpha(x)$是比$x\to 0$时的高阶无穷小，则$f(x)$在点$(3,f(3))$处（　）

(A) 没有切线.

(B) 切线为$x-2y-12=0$.

(C) $f'(x)$不是周期函数.

(D) 切线为$2x-y-6=0$.

三.（本题6分） 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$

上可导，且$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=9$，

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

四.（本题6分） **计算二重积分$\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$，其中平面区域$D$由**

$x=0$，$y=0$，$x+y=2$ 围成.

五.（本题6分）

设$F(x,t)=\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}$，$(x-1)(t-1)>0$，$x\neq t$，定义$f(x)=\lim\limits_{t\to x}F(x,t)$，

讨论$f(x)$的连续性；若有间断点，请将其进行分类.

六.（本题6分）

设$f(x)$与$g(x)$都在$x=0$的某邻域内连续，且$f'(x)$满足下面的等式

$f'(x)=-6\ln(1+\sin^2 x)+x\int_0^1 g(xt)dt$，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[1+g(x)]}{\sin x}=6$，讨论$(0,f(0))$是否为$f(x)$的拐点

七.（本题 7 分）已知$z=z(x,y)$有偏导数

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$；$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，且满足$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$，

$u=x$，$v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$，定义函数$F(u,v)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}$，

计算 $\dfrac{\partial F}{\partial u}$.

八.（本题 7 分）设 $x \geq 0$，$f(x)=e^{-x^2}$，$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$，

(1) 求 $x \geq 0$ 部分，$\varphi(x)$ 的水平渐近线.

(2) 求 $x \geq 0$ 时，由 $\varphi(x)$ 与其水平渐近线以及 y 轴围成图形的面积.

九.（本题 7 分）

设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$，

(1) 证明：$f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

(2) 求 $f(x)$ 的最小值与最大值.

十.（本题 7 分）

设 $x \in [a, b]$ 时，$f(x)$ 单调增加且可积，

证明：$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

十一.（本题 8 分）

设 $f''(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续，对 $\forall \xi \in \left(0, \frac{1}{6}\right)$，$\eta \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$

证明：当 $x \in [0, 1]$ 时，$|f'(x)| \leq 2|f(\xi)-f(\eta)|+\int_0^1 |f''(x)|dx$.

十二.（本题 10 分）设 $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 在第一象限内有二阶连续的偏导数，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$\lim\limits_{x \to 1}\frac{f(x)}{x-1}=2$，求函数 $f(x)$ 的表达式.