2018 年天津市大学数学竞赛试题

（理工类）

一、填空：（本题 15 分，每空 3 分。请将最终结果填在相应的横线上面。）

1.$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=$______。

2.$u=\frac{\cos x^2}{y}$，且 u 关于 x,y 的偏导数连续，则 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{u\partial y}=$______。

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)=$______。

4.$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr=$______。

5. 函数 $f(x,y)=\sin^2 x\sin^2 y$ 在正方形 $0\le x,y\le\pi$ 内均值为______。

二、选择题：（本题 15 分，每小题 3 分。每个小题的四个选项中仅有一个是正确的，把你认为“正确选项”前的字母填在括号内。选对得分；选错、不选或选出的答案多于一个，不得分。）

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ A, & x=2\end{cases}$，下列说法正确的是 (　　)

(A)$A\neq 4$ 时，$f(x)$ 在 $x=2$ 处连续；$A=4$ 时，$f(x)$ 在 $x=2$ 处不连续，且在 $x\neq 2$ 处连续。

(B)$A=4$ 时，$f(x)$ 在 $x=2$ 处连续；$A\neq 4$ 时，$f(x)$ 在 $x=2$ 处不连续，且在 $x\neq 2$ 处连续。

(C)$A=4$ 时，$f(x)$ 在 $x=2$ 处连续；$A\neq 4$ 时，$f(x)$ 在 $x=2$ 处不连续，且在 $x\neq 2$ 处不连续。

(D)$A\neq 4$ 时，$f(x)$ 在 $x=2$ 处连续；$A=4$ 时，$f(x)$ 在 $x=2$ 处不连续，且在 $x\neq 2$ 处不连续。

2. 关于函数 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 极值的说法，下列正确的是 (　　)

(A)$x=1$ 时，y 取极大值；　　(B)$x=1$ 时，y 取极小值；

(C)$x=0$ 时，y 取极大值；　　(D)$x=2$ 时，y 取极小值。

3.(1) 若函数 $f(x)$ 在开区间内每一点确定而有界，则 $f(x)$ 在给定开区间内______；

(2)(1) 若函数 $f(x)$ 在闭区间内每一点确定而有界，则 $f(x)$ 在给定闭区间内______。

下列正确的是 (　　)

(A)(1) 有界 (2) 不一定有界；　　(B)(1) 有界 (2) 有界；

(C)(1) 不一定有界 (2) 不一定有界；　　(D)(1) 不一定有界 (2) 有界。

4.$\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{m=1}^{n}2^{\frac{1}{2m}}=$(　　)

(A)1；　　(B)∞；　　(C)2；　　(D)0。

5. 比较下列各式大小，正确的是 (　　)

$$(1)\int_0^{2\pi}x\sin xdx;\quad(2)\int_0^{2\pi}\cos xdx;\quad(3)\int_0^{2\pi}x^2\cos xdx$$

(A)(2)<(1)<(3)；　　(B)(1)<(2)<(3)；　　(C)(2)<(3)<(1)；　　(D)(3)<(1)<(2)。

三、(6 分)$f(x)$ 为在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数，证明：

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$$

四、(6 分) 设 $f(x)$ 是连续的，求证函数 $u(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^x d\xi\int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi,\eta)d\eta$ 满足下式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$$

五、(6 分) 求曲面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 内的面积。

六、(6 分)$u=x^my^nz^p$，求 u 在 $x+y+z=a(m>0,n>0,p>0,a>0)$ 条件下的极值。

七、(7 分) 十将二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by+c)dxdy$ 化为一重形式，其中 $a^2+b^2\ne 0$。

八、(7 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上可微，且 $x_1x_2>0$，证明：

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),\quad x_1<\xi<x_2$$

九、(8 分) 证明不等式

$$\prod_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

十、(8 分) 证明：若对于函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 有等式 $f(x+T)=kf(x)$(式中 k 和 T 为正常数) 成立，则 $f(x)=a^x\varphi(x)$(式中 a 为大于零的常数，$\varphi(x)$ 为以 T 为周期的函数)。

十一、(8 分) 求曲线积分 $\int_C(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds$，其中 C 为内摆线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的弧。

十二、(8 分) 计算积分 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z)dS$，式中 $f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & z\ge\sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$。

2019 年天津市大学数学竞赛试题

（理工类）

一、填空：（本题 15 分，每空 3 分。请将最终结果填在相应的横线上面。）

1. 极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^{2x}(1+2t)^{\frac{1}{t}}dt =$ ______。

2. 定积分 $\int_0^2\left[\tan(x-1)^3+\sqrt{2x-x^2}\right]dx =$ ______。

3. 函数 $y=f(x)$ 有连续导数，且 $f'(x)>0$，已知 $f(1)=4, f'(1)=3$，则 $y=f(2e^x-1)$ 的反函数在 $y=4$ 处的导数 $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=4} =$ ______。

4. 二元函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $y^2z+xe^{z-1}=2x$ 确定，则 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处沿着方向 $\vec{l}=(1,-1)$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)} =$ ______。

5. 已知平面 π 与平面 $\pi' : 2x-y-z+2=0$ 关于平面 $\pi'' : x-2y+3z+1=0$ 对称，则平面 π 的方程为______。

二、选择题：（本题 15 分，每小题 3 分。每个小题的四个选项中仅有一个是正确的，把你认为“正确选项”前的字母填在括号内。选对得分；选错、不选或选出的答案多于一个，不得分。）

1. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有定义，则极限 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-\tan h)-f(x_0)}{h}=a$ 存在时函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导的 (　　)

(A) 充分不必要条件；　　(B) 必要不充分条件；

(C) 充要条件；　　(D) 不充分也不必要条件。

2.$f(x)$ 是 $[0\,,+\infty)$ 上的单调函数，则数列极限 $\lim_{n\to\infty}f(n)$ 存在是函数极限 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在的 (　　)

(A) 充分不必要条件；　　(B) 必要不充分条件；

(C) 充要条件；　　(D) 不充分也不必要条件。

3. 当 $x\to 1$ 时，$\sqrt[3]{4+\sqrt{15+x^2}}-2$ 是 $k(x-1)^\alpha$ 等价无穷小，则常数 k 与 α 为 (　　)

(A)$k=\frac{1}{48},\alpha=1$；　　(B)$k=\frac{1}{12},\alpha=1$；

(C)$k=\frac{1}{48},\alpha=\frac{1}{3}$；　　(D)$k=\frac{1}{12},\alpha=\frac{1}{3}$。

4. 函数 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，则函数

$$z(x,y)=f(2x-3y,x-y^2)+x$$

在 $(1,1)$ 处取得极值的必要条件是 (　　)

(A)$f_1'(1,1)=0, f_2'(1,1)=0$；　　(B)$f_1'(-1,0)=0, f_2'(-1,0)=0$；

(C)$f_1'(-1,0)=-2, f_2'(-1,0)=3$；　　(D)$f_1'(-1,0)=2, f_2'(-1,0)=-3$。

5. 函数 $y=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e, & x=0\end{cases}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是 (　　)

(A) 单调递增的无界函数；　　(B) 不是单调函数；

(C) 单调递增的有界函数；　　(D) 单调递减的有界函数。

三、(6 分) 已知 $f(x,y)$ 在 $(0,1)$ 点是可微函数，极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,1+h)-f(-h,1+2h)}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h,1+h)-f(h,1-h)}{h}=8$$

求该函数在点 $(0,1)$ 处的微分 $df(x,y)|_{(0,1)}$。

四、(6 分) 设有曲线段 $L: y=x^3(-a\le x\le a)$，D_n 是 xOy 平面上与 L 距离不超过 n 的点集，即

$$D_n=\left\{(x,y)\left|(x-x')^2+(y-y')^2\le n^2,(x',y')\in L\right.\right\}$$

D_n 面积为 A_n，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{n^2}$。

五、(6 分) 求 $f(x)=x\arcsin 2x$ 的 6 阶导数 $f^{(6)}(0)$。

六、(6 分) 利用极坐标变换计算二重积分

$$\iint_D \sin\frac{x+y}{x+2y}dxdy$$

其中 D 是由直线 $x+2y=1$ 与 x,y 轴所围成的三角区域。

七、(7 分)L 是圆 $x^2+y^2=1$ 所围区域的正向边界，计算曲线积分

$$\oint_L\left|x+1-e^{y^2}\right|dx+x^3\left(y^2-y^3\right)dy$$

八、(7 分) 计算积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}z^{\frac{4}{3}}dS$，其中曲面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=4$。

九、(8 分) 设 Ω 是椭球体 $x^2+2y^2+3z^2\le 6$，Σ 是该椭球表面的外侧，计算曲面积分

$$\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+z^2\left[z+\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]dxdy$$

十、(8 分) 设 $f(x)$ 是 $T(T>0)$ 为周期的连续函数，并且 $\int_0^T f(x)dx=k$，若

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R^\lambda}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}f\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]dV=C\ne 0$$

求常数 λ, C。

十一、(8 分) 直线 $L : \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{2}$ 绕直线 $L' : x = -y = z$ 旋转得到旋转曲面 Σ，求旋转曲面 Σ 与平面 $\pi_1 : x - y + z = 0$ 以及 $\pi_2 : x - y + z = 3$ 所围立体体积。

十二、(8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有 n 阶连续导数，如果 $\int_0^1 x^m f(x)dx = 0, \quad m = 0, 1, 2, \cdots, n$，证明：存在 $\xi \in (0, 1)$，使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$。

2021年天津市大学生数学竞赛试题（经管类）

一、填空题（本题15分，每小题3分. 请将最终结果填在相应的横线上面.）

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}(x-t)\cos t^2 dt}{\int_0^x x\cos(x-t)^2 dt}=.$$

3. $$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x^{2n}}\left(\sqrt{8+x^{10}}+\sin\frac{\pi x}{2}\right)dx=$$

4. $$\int_0^{10\pi}x\left|\cos x\right|dx=$$

得分	评卷人	复核人

二、选择题（本题15分，每小题3分. 每个小题的四个选项中仅有一个是正确的，把你认为“正确选项”前的字母填在括号内. 选对得分；选错、不选或选出的答案多于一个，不得分）

1. 设$f(x)$在$[2,+\infty)$连续可导，则当

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$时，$f(x)$在$[2,+\infty)$无界；

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\neq 0$时，$f(x)$在$[2,+\infty)$有界；

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=-1$时，$f(x)$在$[2,+\infty)$有界；

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=1$时，$f(x)$在$[2,+\infty)$无界；

2. 函数$\dfrac{\left(|x|^x-1\right)\left(|x|-1\right)}{x(x+1)(x+2)\ln|x|}$可去间断点有

(A) 1个； (B) 2个； (C) 3个； (D) 0个。

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0,\\ x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$ 则下面说法错误的是

(A) $f(x)$在x=0连续； (B) $f(x)$在x=0可导；

(C) $f(x)$在x=0二阶可导； (D) $f(x)$在x=0二阶不可导。

4. 设 $f(x)$二阶连续可导，且 $f''(x)<0$，$g(x)=(1-x)f(0)+xf(1)$，

则当$0<x<1$时

(A) $f(x)-g(x)\geq 0$; (B) $f(x)-g(x)\leq 0$;

(C) $f(x)-g(x)=0$; (D) $f(x)-g(x)$变号。

5. 已知 $f(x)=e^{x^2}\cos\frac{\pi x^2}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1-\sin x)}{x}=$

(A) $2\pi e$; (B) $-2\pi e$; (C) π; (D) e.

三. （本题 6 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{x}}+2020}{2021}\right)^{\frac{x}{\ln x}}=$

得分	评卷人	复核人

四.（本题6分）

计算不定积分 $\int\max\{x,\sin x\}dx$

五.（本题 6 分）

设 $u(x,y)$ 二阶连续可导，令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,

求$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$

六.（本题 7 分）

计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\rho^2\sin\theta\sqrt{1-\rho^2\cos 2\theta}\,d\rho\right)d\theta$

七.（本题 7 分）

设 n 是自然数，a_n 是方程 $x^n+3nx-1=0$ 的正根，求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+a_n)^n=$

八.（本题 7 分）

计算定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{1+3x^2+5x^4}{1+2^x}dx=$

九.（本题 7 分）

过点 $P(0,3)$ 做曲线 $9x^2+4y^2-54x+45=0$ 的两条切线，求这两条切线和该曲线短的弧段所围成图形的面积。

十.（本题 8 分）

证明不等式 $\frac{95\pi}{357}\le\iint_{x^2+y^2\le1}\sin\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^5}\,dxdy\le\frac{2\pi}{7}$

十一.（本题 8 分）

分别求平面上的椭圆 $(x-a)^2+\frac{y^2}{b^2}=1$ 当 $a=2$ 和 $a=\frac{1}{2}$ 时绕 y 坐标轴旋转所得到旋转体的体积，其中 $b>0$。

十二.（本题 8 分）

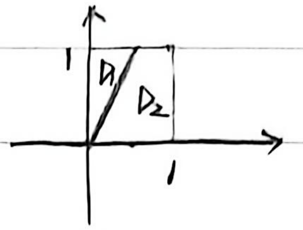
已知数列 $\{x_n\}$ 的各项满足，$x_{n+2}=\frac{3x_{n+1}}{4}+\frac{x_n}{4}+\frac{1}{2^n}$，$n=1,2,\ldots$，且 $x_1=2$，$x_2=1$，求该数列的极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

Mo | Tu | We | Th | Fr | Sa | Su

Memo No.

Date /

2019



一. 1. $\iint_{D_1} y\,dxdy + \iint_{D_2} 2x\,dxdy$

$= \int_0^{\frac12}\left(\int_{2x}^{1} y\,dy\right)dx + \int_0^1\left(\int_{\frac{y}{2}}^{1} 2x\,dx\right)dy$

$= \int_0^{\frac12} \frac12(1-4x^2)\,dx + \int_0^1 \left(1-\frac{y^2}{4}\right)dy$

$= \frac12\left(x-\frac43x^3\right)\Big|_0^{\frac12} + \left(y-\frac{y^3}{12}\right)\Big|_0^1$

$= \frac12\left(\frac12-\frac43\cdot\frac18\right)+\left(1-\frac1{12}\right)$

$= \frac12\times\frac13+\frac{11}{12} = \frac{13}{12}$ $\qquad f(0)=0$

2. $f'(x)+\frac13 f'(2x)\cdot 2 = \frac53 + 11x^2$ $\qquad f'(0)=1$

$f''(x)+\frac43 f''(2x) = 22x$ $\qquad f''(0)=0$

$f'''(x)+\frac83 f'''(2x) = 22$ $\qquad f'''(0)=6$ $\qquad f^{(n)}(0)=0$, $n=4,5,\cdots$

$f(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3.$

$\quad = x+x^3$

$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^n = 0$

3. $\lim_{x\to0}\frac{x^2\int_0^x e^t\sin t^2\,dt - \int_0^x t^2e^t\sin t^2\,dt}{x^k}$

$= \lim_{x\to0}\frac{2x\cdot\int_0^x e^t\sin t^2\,dt + \cancel{x^2e^x\sin x^2} - \cancel{x^2e^x\sin x^2}}{k\,x^{k-1}} = \lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x e^t\sin t^2\,dt}{k\,x^{k-2}}$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date /

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x}\sin x^2}{k(k-2)x^{k-3}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{k(k-2)x^{k-3}} \qquad k=5$$

4. $z = f(u, v) \qquad u = x \quad v = x$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 1 = \frac{x+x}{2} = x$$

$$z = \frac{1}{2}x^2 + C \qquad f(x,x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$f(0,0) = 1 = C$$

$$\therefore y(x) = e^{x}\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)$$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x+\sin x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{8}\ln 2$$

二 1. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(-\frac{1}{2})^{n+3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2}{2+(-\frac{1}{2})^{n}} = \dfrac{\frac{11}{4}}{2} = \dfrac{11}{8}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+3}+4+1+2}{2+2^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{7}{2^{n+3}}}{\frac{2}{2^{n+3}}+\frac{1}{8}} = 8$$

2. $G(x) = (f(x)+2)(1+e^{-x}) + (f(x)+2)\cdot|x|$ $\quad \frac{}{0} \quad \frac{}{1,\,-1}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(f(x)+2)\cdot x}{x-0} = f(0)+2$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{(f(x)+2)\cdot(-x)}{x-0} = -(f(0)+2)$$

$\therefore f(0) = -2$

3. C

4. $(f'(x_0))^3 + 2f'(x_0) = 0$

$f'(x_0)\left((f'(x_0))^2+2\right)=0$ $\qquad f'(x_0)=0$

$3(f'(x))^2\cdot f''(x)+2f''(x)+(-1)e^{-x}-(x_0-x)e^{-x}=0$

$3(f'(x_0))^2\cdot f''(x_0)+2f''(x_0)=e^{-x_0}$

$f''(x_0)>0$

极小值点 $\qquad$ D

5. $\dfrac{1-g(x)}{1+g(x)} = \dfrac{-1-g(x)}{1+g(x)}+\dfrac{2}{1+g(x)} = \dfrac{2}{1+g(x)}-1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\left[\dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}-1\right]=0$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)\left[\dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}-1\right]=0$

$2^{+\infty}$ $\qquad 2^{-\infty}$ $\qquad$ 连续

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}-1\right]=-1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^-}\left[\dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}-1\right]=1$ $\qquad$ 不可导

三. 解: $\begin{cases} H(x,y,z) = y-F(x,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

$H_x=-F_x \qquad H_y=1 \qquad H_z=-F_z$

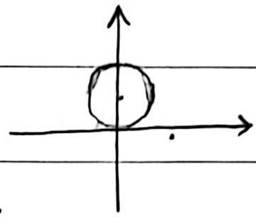
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{J_{xz}}{J_{yz}} = -\frac{\begin{vmatrix} -F_x & -F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = \frac{F_xG_z-G_xF_z}{G_z+G_yF_z}$$

四、解：设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$　　　$x^2+y^2\le 3y$

$\int_0^{\pi}\left(\int_0^{3\sin\theta}\sqrt{9-r^2}\,r\,dr\right)d\theta$　　　$r^2\le 3r\sin\theta$

$r\le 3\sin\theta$

$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{3\sin\theta}\sqrt{9-r^2}\,d(9-r^2)\right)d\theta$



$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[\frac{2}{3}(9-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{3\sin\theta}\right]d\theta$

$=-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left[(9\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}-27\right]d\theta$　　　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\cos^3\theta\,d\theta$

$=9\pi-9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta+9\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^3\theta\,d\theta$　　　$9\pi-\frac{18}{3}-\frac{18}{3}$

$=9\pi-12$

$\int\cos^3\theta\,d\theta$

$=\int(1-\sin^2\theta)\,d\sin\theta=\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^3\theta\,d\theta=-1-\frac{1}{3}\cdot(-1)=-\frac{2}{3}$

五 证明：$\int_0^1\frac{1}{1+x^2+8x^4(1-x^4)}dx\le\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$

$2\sqrt{x^4}\sqrt{1-x^4}\le x^4+1-x^4=1$

$x^4(1-x^4)\le\frac{1}{4}$

$1+x^2+8x^4(1-x^4)\le 1+x^2+2=3+x^2$

$\int_0^1\frac{1}{1+x^2+8x^4(1-x^4)}dx\ge\int_0^1\frac{1}{3+x^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^1\frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{3}})^2}d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{6}-0\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date /

六 解: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}(x-3)^n + 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-3)^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!} = e^{x-3} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}(x-3)^n = (x-3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-3)^{n-1}}{(n-1)!} = (x-3)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(x-3)^n}{(n-1)!}\right)'$$

$$= (x-3)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n-1)!}\right)' = (x-3)\left[(x-3)e^{x-3}\right]'$$

$$= (x-3)\left[e^{x-3}+(x-3)e^{x-3}\right] = (x-3)(x-2)e^{x-3}$$

$$f(x) = (x^2-5x+8)e^{x-3} \qquad x\in(-\infty,+\infty)$$

七 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{n(1+x^7)}{n^2x^2+1}dx$

$$\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}dx = \int_0^1\frac{d(nx)}{1+(nx)^2} = \arctan nx\Big|_0^1 = \arctan n \to \frac{\pi}{2}$$

~~或~~ $\frac{nx^7}{n^2x^2+1} \le \frac{nx^7}{n^2x^2} = \frac{x^5}{n}$

$$\int_0^1\frac{nx^7}{n^2x^2+1}dx = \int_0^1\left(\frac{1}{n}x^5 - \frac{1}{n^3}x^3 + \frac{x}{n^5} - \frac{\frac{x}{n^5}}{n^2x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{x^6}{6} - \frac{1}{n^3}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{1}{n^5}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2n^7}\ln(1+n^2x^2)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{6n} - \frac{1}{4n^3} + \frac{1}{2n^5} - \frac{1}{2n^7}\ln(1+n^2)$$

$\frac{1}{n}x^5 - \frac{1}{n^3}x^3 + \frac{x}{n^5}$

$n^2x^2+1 \,\big|\, nx^7$

$nx^7 + \frac{1}{n}x^5$

$-\frac{1}{n}x^5$

$-\frac{1}{n}x^5 - \frac{x^3}{n^3}$

$\frac{x^3}{n^3}$

$\frac{x^3}{n^3} + \frac{x}{n^5}$

$-\frac{x}{n^5}$

八 解 $\because \int_a^b f(x)dx=0$

$\therefore \exists c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=0$

否则 $f(x)$ 在 (a,b) 不变号. 不妨设 $f(x_0)>0$ $x_0\in(a,b)$

则 $\exists \delta>0$, 使 $\forall x\in U(x_0,\delta)$ $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$

故 $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{f(x_0)}{2}dx = f(x_0)\cdot\delta>0$

$G(x)=f(x)e^{-x}$ $G(a)=G(c)=G(b)=0$

$\therefore \exists x_1\in(a,c)$ 使 $G'(x_1)=(f(x_1)-f'(x_1))e^{-x_1}=0$

$x_2\in(c,b)$ 使 $G'(x_2)=(f(x_2)-f'(x_2))e^{-x_2}=0$

$\therefore f(x_1)-f'(x_1)=0$ $f(x_2)-f'(x_2)=0$

$\therefore \exists \xi\in(x_1,x_2)$, 使得 $f'(\xi)-f''(\xi)=0$

九 解: $F(x,y,z)=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2-1$

$F_x=\frac{2x}{9}$ $F_y=\frac{y}{2}$ $F_z=2z$

过点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面为 $\frac{2x_0}{9}(x-x_0)+\frac{y_0}{2}(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$

点 $(3,2,0)$ 在切平面上

$\therefore \frac{2x_0}{9}(3-x_0)+\frac{y_0}{2}(2-y_0)+2z_0(-z_0)=0$

$\frac{2x_0}{3}-\frac{2x_0^2}{9}+y_0-\frac{2y_0^2}{4}-2z_0^2=0$

$\frac{2x_0}{3}+y_0-2=0$

$y_0=2-\frac{2x_0}{3}$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date /

$$\begin{cases} x_0 = 3\sin\varphi\cos\theta \\ y_0 = 2\sin\varphi\sin\theta \quad 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ z_0 = \cos\varphi \quad 0<\varphi<\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$2\sin\varphi\cos\theta + 2\sin\varphi\sin\theta = 2$$

$$\sin\varphi(\cos\theta+\sin\theta)=1$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$$

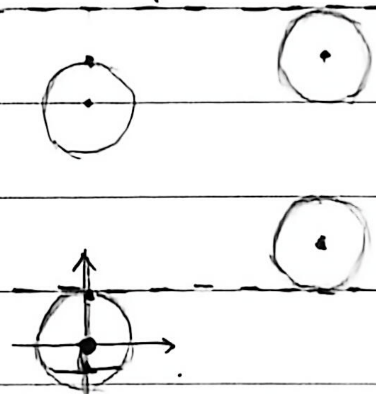
(x_0, y_0, z_0) 与 $(3,2,0)$ 连线中点为

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}(\sin\varphi\cos\theta+1) = \frac{3}{2}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+1\right) \\ y = \sin\varphi\sin\theta+1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}+1 \\ z = \frac{\cos\varphi}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}} = \frac{1\sqrt{2\sin\theta\cos\theta}}{\cos\theta+\sin\theta} \end{cases}$$

7. $W_1 = \frac{4}{3}\pi R^3\cdot(\mu-1)g\cdot R = \frac{4}{3}\pi g R^4(\mu-1)$

$$W_2 = \int_{-R}^{R}\pi(R^2-y^2)\cdot(\mu-1)g\cdot(R-y)\,dy$$

$$+\int_{-R}^{R}\pi(R^2-y^2)\mu g(R+y)\,dy$$



$$=2\pi\mu g\cdot R\int_{-R}^{R}-(R^2-y^2)\cdot 2R\,dy - \pi g\int_{-R}^{R}(R^3-R^2y-Ry^2+y^3)\,dy$$

$$=2\pi\mu gR\left(R^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} - \pi g\left(R^3y-\frac{1}{2}R^2y^2-\frac{1}{3}Ry^3+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_{-R}^{R}$$

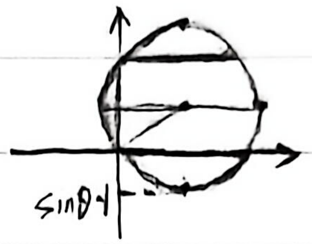
$$=2\pi\mu gR\left(2R^3-\frac{2R^3}{3}\right)-\pi g\left(2R^4-\frac{2}{3}R^4\right)$$

$$=\frac{8}{3}\pi\mu gR^4-\frac{4}{3}\pi gR^4 = \frac{4}{3}\pi gR^4(2\mu-1)$$

$$W_3 = \frac{4}{3}\pi R^3\mu gR = \frac{4}{3}\pi gR^4\mu$$

$$W = \frac{8}{3}\pi gR^4(2\mu-1)$$

十、 $(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=1$



$x_1=\cos\theta+\sqrt{1-(y-\sin\theta)^2}$

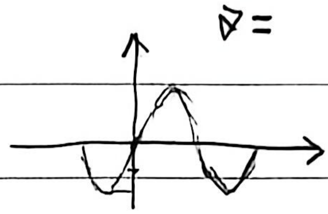
$x_2=\cos\theta-\sqrt{1-(y-\sin\theta)^2}$

$$\int_{\sin\theta-1}^{0}\pi\cdot 2\cos\theta\cdot 2\sqrt{1-(y-\sin\theta)^2}\,dy$$

$$\int_{-1}^{-\sin\theta}\pi\cdot 4\cos\theta\cdot\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$t=\sin\alpha=-\sin\theta$

$\alpha=$



$$4\int_{-1}^{-\sin\theta}\sqrt{1-t^2}\,dt=4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\theta}\cos^2\alpha\,d\alpha$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\theta}(\cos2\alpha+1)\,d(2\alpha)$$

$$=\sin2\alpha+2\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\theta}=-\sin2\theta-2\theta+\pi$$

$V_1=\pi\cos\theta\cdot(\pi-\sin2\theta-2\theta)$

$$V_2=\int_0^{\sin\theta}\pi\left(\cos\theta+\sqrt{1-(y-\sin\theta)^2}\right)^2dy$$

$-y^2+2y\sin\theta-\sin^2\theta$

$t=\sin\alpha=\pi-\sin\theta$

$\alpha=$

$$=\int_0^{\sin\theta}\pi\left(\cos^2\theta+1-(y-\sin\theta)^2+2\cos\theta\sqrt{1-(y-\sin\theta)^2}\right)dy$$

$$=\pi\int_0^{\sin\theta}\left(2\cos^2\theta-y^2+2y\sin\theta+2\cos\theta\sqrt{1-(y-\sin\theta)^2}\right)dy$$

$$=\pi\left[\left(2\cos^2\theta\,y-\frac{y^3}{3}+\sin\theta\cdot y^2\right)\Big|_0^{\sin\theta}+2\cos\theta\int_{-\sin\theta}^{0}\sqrt{1-t^2}\,dt\right]$$

$$=\pi\left(2\cos^2\theta\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}+\sin^3\theta\right)+2\pi\cos\theta\int_{-\theta}^{0}\cos^2\alpha\,d\alpha$$

$$=\pi\left(2\cos^2\theta\sin\theta+\frac{2}{3}\sin^3\theta\right)+\pi\cos\theta\int_{-\theta}^{0}(\cos2\alpha+1)\,d\alpha$$

$$=\pi\left(\qquad\right)+\pi\cos\theta\left(\frac{1}{2}\sin2\alpha+\alpha\right)\Big|_{-\theta}^{0}$$

$\pi\cos\theta\left(\frac{1}{2}\sin2\theta+\theta\right)$

Memo No.

Date /

$(2\sin\theta\cos^2\theta + \frac{2}{3}\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta + \theta\cdot\cos\theta)$

$3\sin\theta\cos^2\theta + \frac{2}{3}\sin^3\theta$

$3\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \frac{2}{3}\sin^3\theta = 3\sin\theta - \frac{7}{3}\sin^3\theta$ ✓

$2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta$

$3\sin\theta - \frac{7}{3}\sin^3\theta$

$\therefore V = 2(V_1+V_2)$

$= 2[\pi\cos\theta(\pi - \sin 2\theta - 2\theta) + \pi(3\sin\theta - \frac{7}{3}\sin^3\theta + \theta\cdot\cos\theta)]$

$= 2\pi[\pi\cos\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta - 2\theta\cdot\cos\theta + 3\sin\theta - \frac{7}{3}\sin^3\theta + \theta\cos\theta]$

$= 2\pi[\pi\cos\theta - 2\sin\theta + 2\sin^3\theta - 2\theta\cdot\cos\theta + 3\sin\theta - \frac{7}{3}\sin^3\theta + \theta\cos\theta]$

$= 2\pi[\pi\cos\theta + \sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta - \theta\cos\theta]$

十二. $1+x_n > a$ $x_n > a-1$

$a>1$ 时. $x_2 = \frac{ax_1}{1+x_1} < x_1$ 单调递减

$x_2-(a-1) = \frac{ax_1}{1+x_1} - (a-1) = \frac{ax_1 - a - ax_1 + 1 + x_1}{1+x_1}$

$\lim_{n\to\infty} x_n \geq a-1$ $= \frac{x_1-a+1}{x_1+1} = \frac{x_1-(a-1)}{x_1+1} > 0$

舍0 $x_2 > a-1$ … $x_3 < x_2$ $x_3 > a-1$

$> x_1 > 0$ … $x = \frac{ax}{1+x} \Rightarrow x = a-1$

③ $x_1 = a-1$

$x_2 = x_1 = a-1$

$\lim_{n\to\infty} x_n \leq a-1$ $x_1 < a-1$ $x_2 = \frac{ax_1}{1+x_1} > x_1$ 单增

舍0

$x_2-(a-1) = \frac{x_1-(a-1)}{x_1+1} < 0$ $x_3 > x_2$ …

$0<a<1$ 时. $x_{n+1} = \frac{ax_n}{1+x_n} \leq \frac{x_n}{1+x_n} < x_n$ 单减

$a=1$ 时 均为0

21年

五、$u(x, y)$ 二阶连续可导　令 $x = r\cos\theta$　$y = r\sin\theta$

求 $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

解：
$$
\begin{tikzcd}
 & & r \\
 & x \arrow[ur, "\cos\theta"] \arrow[r, "-r\sin\theta"'] & \theta \\
u \arrow[ur] \arrow[dr] & & r \\
 & y \arrow[ur, "\sin\theta"] \arrow[r, "r\cos\theta"'] & \theta
\end{tikzcd}
$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = u_1' \cdot \cos\theta + u_2' \cdot \sin\theta \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -u_1 \cdot r\sin\theta + u_2 \cdot r\cos\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(u_1'\cos\theta + u_2'\sin\theta\right)$$

$$= \frac{\partial u_1'}{\partial r}\cdot\cos\theta + \frac{\partial u_2'}{\partial r}\sin\theta$$

$$= (u_{11}''\cos\theta + u_{12}''\sin\theta)\cos\theta + (u_{21}\cos\theta + u_{22}\sin\theta)\sin\theta$$

$$= u_{11}\cos^2\theta + u_{22}\sin^2\theta + 2u_{12}\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\cdot r\sin\theta - u_1 \cdot r\cos\theta + \frac{\partial u_2}{\partial \theta}\cdot r\cos\theta + u_2 \cdot r\cdot(-\sin\theta)$$

$$= -(-u_{11}r\sin\theta + u_{12}r\cos\theta)\cdot r\sin\theta - u_1 \cdot r\cos\theta$$

$$+ (-u_{21}r\sin\theta + u_{22}r\cos\theta)\cdot r\cos\theta - u_2 r\sin\theta$$

$$= u_{11}r^2\sin^2\theta - 2u_{12}r^2\sin\theta\cos\theta + u_{22}r^2\cos^2\theta - u_1 r\cos\theta - u_2 r\sin\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = u_{11} + u_{22} - \frac{u_1\cos\theta + u_2\sin\theta}{r}$$

Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su

Memo No.

Date /

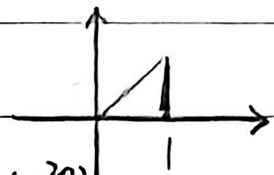
六、 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho^2 \sin\theta \cdot \sqrt{1-\rho^2\cos 2\theta}\, d\rho \right) d\theta$

$y\cdot\sqrt{1-(x^2-y^2)}$

$\rho\cos\theta \le 1$

$x \le 1$

$\int_0^1 \left(\int_0^x y\cdot\sqrt{1-x^2+y^2}\,dy\right)dx$



$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^x \sqrt{1-x^2+y^2}\,d(1-x^2+y^2)\right)dx$

$\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2}{3}(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=0}^{y=x}\,dx$

$=\frac{1}{3}\int_0^1\left(1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)dx$

$2\cos^2 t-1=\cos 2t$

$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$

$=\frac{1}{3}\left(1-\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx\right)$

$\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}\,d(\sin t)$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\cdot\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)\,dt$

$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}t+\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{16}$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date /

七 a_n是方程 $x^n+3nx-1=0$ 的正根

$\lim\limits_{n\to+\infty}(1+a_n)^n$

解：设 $f(x)=x^n+3nx-1$ $\quad f(0)=-1$

$f(\frac{1}{n})\to 2$ $\quad f'(x)=nx^{n-1}+3n>0 \quad x\geq 0$

$f(x)$ 严格单增

$\therefore\ 0<a_n<\frac{1}{n}\to 0 \quad a_n^n+3na_n=1$

$$\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln(1+a_n)}=\cancel{\lim_{n\to+\infty}}e^{n\ln(1+\frac{1-a_n^n}{3n})}=\lim_{n\to+\infty}e^{n\cdot\frac{1-a_n^n}{3n}}=e^{\frac{1}{3}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}e^{na_n}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1-a_n^n}{3}}=e^{\frac{1}{3}}$$

八 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1+3x^2+5x^4}{1+2^x}dx$

解 $$\int_{-1}^{0}\frac{1+3x^2+5x^4}{1+2^x}dx=\int_{0}^{1}\frac{1+3t^2+5t^4}{1+2^{-t}}dt$$

$$=\int_0^1\frac{2^t(1+3t^2+5t^4)}{2^t+1}dt=\int_0^1\frac{2^x(1+3x^2+5x^4)}{2^x+1}dx$$

$$\int_0^1\frac{(2^x+1)(1+3x^2+5x^4)}{2^x+1}dx=\int_0^1(1+3x^2+5x^4)dx$$

$$=(x+x^3+x^5)\Big|_0^1=3$$

Memo No.
Date /

九. $F(x,y)=9x^2+4y^2-54x+45$ $\quad 9(x^2-6x+9)-81+4y^2+45=0$

$F_x=18x-54 \qquad F_y=8y \qquad 9(x-3)^2+4y^2=36$

$3-\sqrt{\frac{36-4y^2}{9}}$

$(18x_0-54)(0-x_0)+8y_0(3-y_0)=0$

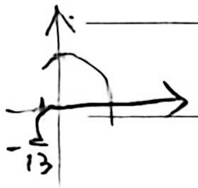
$-18x_0^2+54x_0+24y_0-8y_0^2=0$

$-9x_0^2+27x_0-4y_0^2+12y_0=0 \qquad 9x_0^2+4y_0^2-27x_0-12y_0=0$

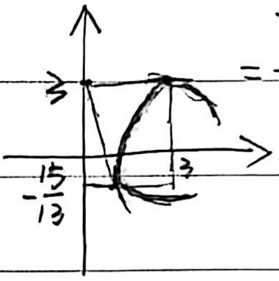
$9x_0^2+4y_0^2-54x_0+45=0 \qquad y=kx+3$

$-27x_0+12y_0+45=0 \qquad -\frac{15}{13} \quad \frac{15}{13} \qquad \frac{-\frac{15}{13}-3}{\frac{15}{13}}$

$-9x_0+4y_0+15=0 \qquad =-1-\frac{13}{5}$



$y_0=\frac{9x_0-15}{4} \qquad =-\frac{18}{5}$



$9x_0^2-54x_0+\frac{(9x_0-15)^2}{4}+45=0$

$9x_0^2-54x_0+\frac{81x_0^2-270x_0+225}{4}+45=0$

$36x_0^2-216x_0+81x_0^2-270x_0+225+180=0$

$x=\sin t$

$\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{5}{13}}\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad 117x_0^2-486x_0+405=0 \qquad \int_{-\frac{15}{13}}^{3}\left(\int_{\frac{y-3}{-\frac{18}{5}}}^{3-\frac{2\sqrt{9-y^2}}{3}}1\,dx\right)dy$

$39x_0^2-162x_0+135=0$

$x=\sin t$

$\int_0^{\arcsin\frac{5}{13}}\cos^2 t\,dt \qquad 13x_0^2-54x_0+45=0 \qquad \left(3-\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}+\frac{y-3}{\frac{18}{5}}\right)dy$

$x_0^2-6x_0+\frac{9x_0^2-30x_0+25}{4}+5=0 \qquad \frac{13}{6}\left(\frac{60}{13}\right)-6\int\sqrt{1-\left(\frac{y}{3}\right)^2}\,d\left(\frac{y}{3}\right)$

$\frac{1}{2}(\cos 2t+1)\,dt \qquad 4x_0^2-24x_0+9x_0^2-30x_0+45=0 \qquad 6$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+t\right) \qquad + \frac{5}{18}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{24}{13}\cdot\frac{54}{13}\cdot 3$

$x_0=3 \qquad x_0=\frac{15}{13}$

$=\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}t \qquad y_0=3 \qquad y_0=-\frac{15}{13} \qquad 10+\frac{90}{169}=$

$=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\Big|_0^{\frac{5}{13}} \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{60}{169} \quad -3\arcsin\frac{5}{13}$

Memo No.
Date /

$$+\quad \frac{95\pi}{357} \le \iint_{x^2+y^2\le 1} \sin\sqrt{(x^2+y^2)^5}\,dx\,dy \le \frac{2}{7}\pi$$

$$\parallel$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sin r^5 \cdot r\,dr\right)d\theta$$

考虑 $f(x)=\sin x - x$ $\quad\because f'(x)=\cos x - 1<0 \quad (0<x<1)$

$\therefore f(x)$ 在 $[0.1]$ 上严格递减 $\quad f(x)<f(0)=0$

$\therefore \sin x < x \quad x\in[0.1]$

$\therefore \int_0^1 \sin r^5\cdot r\,dr \le \int_0^1 r^5\cdot r\,dr = \frac{r^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{1}{7}$

$\therefore \iint_{x^2+y^2\le 1} \sin\sqrt{(x^2+y^2)^5}\,dx\,dy \le \int_0^{2\pi}\frac{1}{7}\,d\theta = \frac{2\pi}{7}$

$\sin r^5 \ge r^5 - \frac{r^{15}}{6}$

$$\int_0^1 \sin r^5\cdot r\,dr \ge \int_0^1\left(r^6 - \frac{r^{16}}{6}\right)dr = \frac{1}{7}-\frac{1}{102}$$

$$= \frac{95}{714}$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \sin\sqrt{(x^2+y^2)^5}\,dx\,dy \ge \int_0^{2\pi}\frac{95}{714}\,d\theta = \frac{95\pi}{357}$$

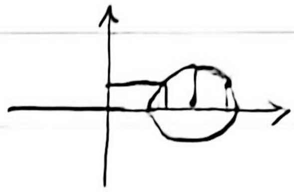
Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date /

十一. $(x-a)^2+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\int_0^b (\pi 4a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}})dy$



$(a+\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}})^2-(a-\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}})^2=2a\cdot 2\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}=4a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$

$=8\pi b\int_0^b \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,d(\frac{y}{b})=8\pi b\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$

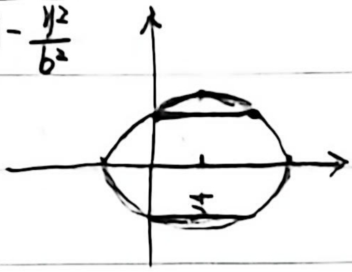
$=8\pi b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=4\pi b\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta+1)d\theta$

$=2\pi b\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+4\pi b\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi^2 b$

$a=2$ 时，旋转体的体积为$4\pi^2 b$

$(x-\frac{1}{2})^2+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\quad x=\frac{1}{2}+\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$

$x=0$ 时. $\frac{y^2}{b^2}=\frac{3}{4}$ $\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}b$



$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}b}\pi\cdot[\frac{1}{4}+(1-\frac{y^2}{b^2})+\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}]dy$

$=b\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\pi[\frac{1}{4}+(1-t^2)+\sqrt{1-t^2})dt$ $\quad \pi b(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi b$ $=b\pi[(\frac{5}{4}t-\frac{t^3}{3})\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\,d\theta]$ $=\pi b(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2}{3}\pi)$

$=\frac{1}{2}b\pi(\cos 2\theta+1)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\pi b(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3})=$

$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}b}^{b}\pi\cdot 2\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=2\pi b\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$

$=2\pi b\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\pi b\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta+1)d\theta=\pi b(\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\pi b[\frac{1}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2})+\frac{\pi}{6}]=\frac{1}{2}\pi b(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3})$

十二 $x_{n+2}=\frac{3x_{n+1}}{4}+\frac{x_n}{4}+\frac{1}{2^n}$ 且 $x_1=2,\ x_2=1$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

$x_3=\frac{3}{4}x_2+\frac{x_1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{4}$ $\quad 2-\frac{1}{4}$

$x_4=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{29}{16}$ $\quad 2-\frac{3}{16}$

$x_5=\frac{3}{4}\cdot\frac{29}{16}+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{4}+\frac{1}{32}=\frac{87+2+28}{64}=\frac{117}{64}$ $\quad 2-\frac{11}{64}$

$x_6=\frac{3}{4}\cdot\frac{117}{64}+\frac{1}{4}\cdot\frac{29}{16}+\frac{1}{64}=\frac{351+116+4}{256}=\frac{471}{256}$ $\quad 2-\frac{41}{256}$

$x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{1}{4}(x_{n+1}-x_n)+\frac{1}{2^n}$

$y_{n+1}=-\frac{1}{4}y_n+\frac{1}{2^n}$ $\qquad y_1=x_2-x_1=-1$

$x_n=x_1+x_2-x_1+x_3-x_2+\cdots+x_n-x_{n-1}$

$=2+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}$

$=2-1+\sum\limits_{k=2}^{n-1}\left(\frac{20}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2^n}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty}=1+\frac{20}{3}\cdot\frac{\frac{1}{16}}{\frac{5}{4}}+\frac{4}{3}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$

$=1+\frac{4}{5}\cdot\frac{20}{3}\cdot\frac{1}{16}+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}$

$=1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$

$=2$

$y_2=-\frac{1}{4}y_1+\frac{1}{2^1}$ $\qquad \frac{20}{3}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{3}$

$y_3=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}y_1+\frac{1}{2^1}\right)+\frac{1}{2^2}$

$=\frac{1}{4^2}y_1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}$

$y_4=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^2}y_1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{2^3}$

$=\left(-\frac{1}{4}\right)^3y_1+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^3}$

$y_5=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}y_1-\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^4}$

$y_n=(-1)^n\cdot\frac{4}{4^n}+\frac{\frac{1}{2^{n-1}}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{\frac{3}{2}}$

$=4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{2^n}+\frac{(-1)^n\cdot 4}{4^n}\right)$

$=4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n$

$=\frac{20}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2^n}$

1 设 $1<x<2$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{2n}}$

$\left(1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{2n}} = e^{\frac{1}{2n}\ln\left(1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)}$

$= \exp\left\{\frac{1}{2n}\cdot\ln\left[x^n\cdot\left[\frac{1}{x^n}+1+\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]\right]\right\}$

$= \exp\left\{\frac{1}{2n}\cdot\left[n\ln x+\ln\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)\right]\right.$

$= \exp\left\{\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2n}\cdot\left[\left(\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]\right.$

$\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{x}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\ln(1+\sin x\tan x)}$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{2\ln(1+\sin x\tan x)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{1+x\cdot\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)}{2\sin x\tan x}$

$= \lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{24}x^4}{2\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\left(x+\frac{x^3}{3}\right)} = \frac{3}{4}$

3. 已知 $\int f(x)dx = x^2+C$ 则 $\int xf(1-x^2)dx =$

$f(x)=2x$ $\quad \int x\cdot2(1-x^2)dx = x^2-2\cdot\frac{x^4}{4}+C$

$= x^2-\frac{x^4}{2}+C$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No.

Date /

4 设 $f(x,y)$ 具有连续的偏导数，$g(x)$ 和 $h(x)$ 都连续可导，$z = f(xy,\ g(\frac{y}{x}) + h(xy))$，则 $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} =$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1\cdot y + f_2\cdot g'(\tfrac{y}{x})\cdot(-\tfrac{y}{x^2}) + f_2\, h'(xy)\cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_1\cdot x + f_2\cdot g'(\tfrac{y}{x})\cdot\tfrac{1}{x} + f_2\cdot h'(xy)\cdot x$$

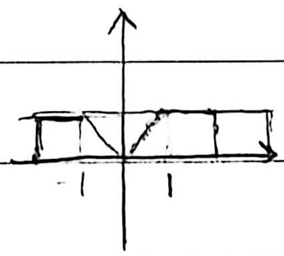
$$x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= f_2\cdot g'(\tfrac{y}{x})(-\tfrac{y}{x}) - f_2\cdot g'(\tfrac{y}{x})\cdot\tfrac{y}{x}$$

$$= -2f_2\cdot g'(\tfrac{y}{x})\cdot(\tfrac{y}{x})$$

5 $f(x) = \begin{cases} |x|, & |x|\le 1 \\ 1, & |x|>1 \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} |x-1|, & |x-1|\le 1 \\ 1 & |x-1|>1 \end{cases}$,

则 $\int_{-3}^{3}(f(x)+g(x))\,dx$



$$= \int_{-3}^{3}(f(x)+f(x-1))\,dx$$

$$= \int_{-3}^{3} f(x)\,dx + \int_{-4}^{2} f(x)\,dx \qquad 2\int_0^3 f(x)\,dx \ +$$

$$= 2\int_{-2}^{2} f(x)\,dx + 2\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx + \int_{-4}^{-2} f(x)\,dx$$

$$= 4\int_0^2 f(x)\,dx + 4 = 4\cdot\frac{3}{2} + 4 = 10$$

2.1、设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 若x为有理数 \\ 0 & 若x为无理数 \end{cases}$，$g(x)=f(x(1-x^2))$

则 $g(x)$ 所有的连续点为（　　）　$0, \pm 1$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\in Q}} f(x(1-x^2)) =$$

2. 二阶连续可导的函数 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值的充分条件是

3 $\int_0^x (x-t)\sin t^2 dt$ 与 $\frac{C_4x^4+C_3x^3+C_2x^2+C_1x}{12}$ 是等价无穷小量

则

$$x\cdot\int_0^x \sin t^2 dt - \int_0^x t\sin t^2 dt$$

$$= x\cdot\int_0^x (t^2-\frac{t^6}{6})dt - \frac{1}{2}\int_0^x \sin t^2 d(t^2)$$

$$= x\cdot(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{42}) + \frac{1}{2}(\cos x^2 - 1)$$

$$= \frac{x^4}{3} - \frac{x^8}{42} + \frac{1}{2}(1-\frac{x^4}{2}-1) = \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{12}$$

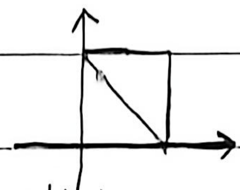
4 设 $f(x)$ 在 $[0\ +\infty)$ 有一阶连续的导数

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 有界　（×）

$f(x)=\ln(x+1)$　　　$f'(x)=\frac{1}{x+1}$

5. 设 $D=\{(x,y)|0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\}$，则 $\iint\limits_D |\cos(x+y)|dxdy$

$0\le x+y\le\pi$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)dy\right)dx$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)dy\right)dx$$

Memo No.

Date /

6 $\int \frac{3\,dx}{x^{16}(1+x^6)}$

$x^2 = t \quad x = t^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{a}{x^{16}} + \frac{b}{1+x^6} \quad dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$

$a + a x^6 + b x^{16} \quad \frac{3}{t^2(1+t^3)}$

$a = x^{10} \quad b = -1$

$\frac{3x^2\,dx}{x^{18}(1+x^6)} = \frac{d(x^3)}{x^{18}(1+x^6)}$ 令 $x^3 = u \quad \frac{du}{u^6(1+u^2)}$

$\frac{a}{u^6} + \frac{b}{1+u^2} \quad u = \frac{1}{t} \quad \cancel{du =} \frac{du}{dt} = -t^{-2}$

$\cancel{a + a u^2 + b u^6 \quad a = -u^4}$

$\frac{-t^{-2}dt}{t^{-6}(1+t^{-2})} = -\frac{dt}{t^{-4}(1+t^{-2})}$

$\frac{t^6+1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1} \quad = -\frac{t^4\,dt}{1+t^{-2}} = -\left(\frac{t^6}{t^2+1}\right)dt$

$1 - t^2 + t^4$

$t^2+1 \,\big|\, t^6 \quad t^4 - t^2 + 1 \quad \left(-(t^4 - t^2 + 1) + \frac{1}{t^2+1}\right)dt$

$t^6 + t^4$

$-t^4 - t^2 \quad t^6 = (t^2+1)(t^4-t^2+1) - 1$

t^2+1

-1

$x = \frac{1}{t} \quad dx = -\frac{1}{t^2}dt \quad t^{20} = (t^6+1)(t^{14} - t^8 + t^2) - t^2$

$-\left[(t^{14} - t^8 + t^2) - \frac{t^2}{t^6+1}\right]dt$

$\frac{3}{(\frac{1}{t})^{16}(1+\frac{1}{t^6})}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt \quad \frac{-t^{20}}{t^6+1}dt$

$\frac{dt^3}{t^6+1} = \frac{dt^3}{1+(t^3)^2}$

$t^6+1 \,\big|\, t^{20} \quad t^{14} - t^8 + t^2 \quad \arctan t^3$

$t^{20} + t^{14} \quad t^8 + t^2$

$-t^{14} \quad -t^2$

$-t^{14} - t^8$

扫描全能王 创建

Memo No.

Date /

4. 证明 $\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2+8x^4(1-x^4)}dx \le \frac{\pi}{4}$

$\sqrt{x^4(1-x^4)} \le \frac{x^4+1-x^4}{2} = \frac{1}{2}$

$x^4(1-x^4) \le \frac{1}{4}$

$8x^4(1-x^4) \le 2$ $\quad 1+x^2+8x^4(1-x^4) \ge 1+x^2$

$\frac{1}{1+x^2+8x^4(1-x^4)} \ge \frac{1}{3+x^2} = \frac{1}{3[1+(\frac{x}{\sqrt{3}})^2]}$ $\quad \frac{1}{1+x^2+8x^4(1-x^4)} \le \frac{1}{1+x^2}$

$\int_0^1 \frac{1}{3[1+(\frac{x}{\sqrt{3}})^2]}dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{3}})^2}d(\frac{x}{\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\Big|_0^1$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{n!(n+2)}{(n+1)!(n+3)} = \frac{1}{n+1} \to 0$

5. $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!(k+2)}$ $\quad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n!(n+2)} = x^{-2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)}\cdot\frac{1}{n!}$

$\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\cdot\frac{1}{n!}\right)' = \sum_{n=2}^{+\infty}(x^{n+1})\cdot\frac{1}{n!} = x\cdot\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = x(e^x-x-1)$

$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n!(n+2)} = \int x(e^x-x-1)dx = \int x\,de^x$

$xe^x - e^x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$

$e^x + xe^x - e^x$

$\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}$

$e - e - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1$ $\quad \frac{1}{6}$

Memo No. Date /

7 曲面 $(x+y)^2+(x-y)^2+z^2=1$ 上到平面 $x+y+z=5$ 之间距离最短和最大的点的坐标和相应的距离.

$$L=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2+\lambda\left((x_1+y_1)^2+(x_1-y_1)^2+z_1^2-1\right)$$
$$+\mu(x_2+y_2+z_2-5)$$

$$L_{x_1}=2(x_1-x_2)+\lambda(\underbrace{2(x_1+y_1)+2(x_1-y_1)}_{4x_1})$$

$$L_{y_1}=2(y_1-y_2)+\lambda(\underbrace{2(x_1+y_1)-2(x_1-y_1)}_{4y_1})$$ $\quad x_1=y_1=\frac{z}{2}$

$$L_{z_1}=2(z_1-z_2)+\lambda(2z_1)$$

$$L_{x_2}=-2(x_1-x_2)+\mu$$ $\quad x_1-x_2=y_1-y_2=z_1-z_2=a$

$$L_{y_2}=-2(y_1-y_2)+\mu$$ $\quad x_2=y_2 \quad z_2=z_1-(y_1-y_2)$

$$L_{z_2}=-2(z_1-z_2)+\mu$$ $\quad =-\frac{z_1}{2}+y_2$

$$L_\lambda=(x_1+y_1)^2+(x_1-y_1)^2+z_1^2-1$$ $\quad z_1^2+z_1^2-1=0$

$$L_\mu=x_2+y_2+z_2-5$$ $\quad z_1^2=\frac{1}{2}$

$z_1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad z_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$y_2+y_2+\frac{z_1}{2}+y_2-5=0$$

$x_1=\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad x_1=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$3y_2+\frac{z_1}{2}-5=0$$

$y_1=\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad y_1=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$x_2=y_2=\frac{5-\frac{z_1}{2}}{3}=\frac{5+\frac{1}{2\sqrt{2}}}{3}$$

$$z_2=-\frac{z_1}{2}+\frac{5-\frac{z_1}{2}}{3}=-\frac{z_1}{3}+\frac{5}{3}$$ $\quad z_1$

$(8+25-\frac{40}{\sqrt{2}})$

$$(z_2-z_1)=-\frac{4}{3}z_1+\frac{5}{3}$$

$33-\frac{40}{\sqrt{2}}$

$$3\cdot\frac{1}{3^2}(4z_1-5)^2 \qquad \frac{1}{3}\left(\frac{4}{\sqrt{2}}-5\right)^2 \quad 最小 \quad 33-20\sqrt{2}$$

$$\frac{(4\sqrt{2}-5)^2}{3} \qquad \frac{5-4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \qquad \frac{1}{3}\left(-\frac{4}{\sqrt{2}}-5\right)^2 \quad 最大 \quad 11-\frac{10}{3}\sqrt{2}$$

$$L=\frac{(x+y+z-5)^2}{3}+\lambda((x+y)^2+(x-y)^2+z^2-1)$$

$$L_x=\frac{2}{3}(x+y+z-5)+\lambda[\overbrace{2(x+y)+2(x-y)}^{4x}]$$ $x=y=\frac{z}{2}$

$$L_y=\frac{2}{3}(x+y+z-5)+\lambda[\overbrace{2(x+y)-2(x-y)}^{4y}]$$

$$L_z=\frac{2}{3}(x+y+z-5)+\lambda\cdot 2z$$

$$L_\lambda=(x+y)^2+(x-y)^2+z^2-1$$

$z^2+z^2-1=0$ $z^2=\frac{1}{2}$ $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $z=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

球面上切平面与$x+y+z=5$平行的点满足

$4x=4y=2z=k$ $x=y=\frac{z}{2}$

7. 证明 $e^x+e^{-x}\geq 2+x^2$ $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$

$f(x)=e^x+e^{-x}-2-x^2$ $1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}$

$f'(x)=e^x-e^{-x}-2x$ $2(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots)$

$f''(x)=e^x+e^{-x}-2$ $\geq 2+x^2$

$=(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})^2>0$ $(x\neq 0)$

$f'(0)=0$

$x<0$时, $f'(x)<0$ $x>0$时 $f'(x)>0$

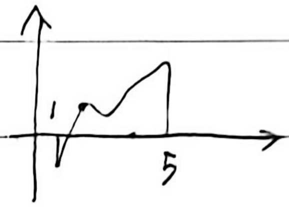
8 设 $f(x)$ 在区间 $[1,5]$ 连续可导，且 $f(1)f(5)<0$ $f'(x)>2f(x)$

证明方程 $f(x)=0$ 在 $[1,5]$ 有且仅有一个根

$f'(x)-2f(x)>0$

$$(f(x)e^{-2x})' = f'(x)e^{-2x}+f(x)e^{-2x}\cdot(-2)$$

$$= \underbrace{(f'(x)-2f(x))}_{>0}\underbrace{e^{-2x}}_{>0}$$



$F(x)=f(x)e^{-2x}$

$F'(x)>0$ $\quad F(1)=f(1)e^{-2}$ $\quad F(5)=f(5)e^{-10}$

$F(x)$ 严格递增 $\quad F(1)<0<F(5)$

9 $$\int_3^5 \frac{\sqrt{\ln(12-x)}}{\sqrt{\ln(12-x)}+\sqrt{\ln(4+x)}}\,dx$$

$12-x=u$

$x=12-u$

$4+x=16-u$

7 9 7 9

$$\frac{\ln(12-x)-\sqrt{\ln(12-x)}\cdot\sqrt{\ln(4+x)}}{\ln(12-x)\pm\ln(4+x)}$$

$$\int_7^9 \frac{\sqrt{\ln u}}{\sqrt{\ln u}+\sqrt{\ln(16-u)}}\,du$$

$$=\int_7^9 \frac{\ln u-\sqrt{\ln u\cdot\ln(16-u)}}{\ln u-\ln(16-u)}\,du$$

$\cancel{\sqrt{\ln u}}$ $\quad \ln u=t$

$u=e^t$

$$=\int_{\ln 7}^{\ln 9} \frac{t-\sqrt{t\cdot\ln(16-e^t)}}{t-\ln(16-e^t)}\,e^t\cdot dt$$

$8-4-x=4-x=t$

$4+x=4+(4-t)$

$4+x-8 \quad =8-t$

$12+x$

$12-x \quad 8-12-x \quad -4-x$

$12-x=12-(4-t)$

$=8+t$

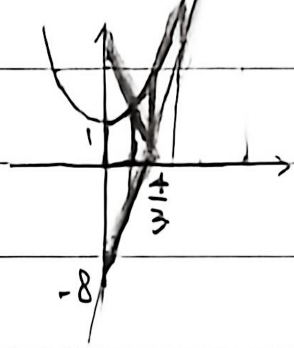
$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\ln(8+t)}}{\sqrt{\ln(8+t)}+\sqrt{\ln(8-t)}}\,dt$$

$$=\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\ln(8-t)}}{\sqrt{\ln(8-t)}+\sqrt{\ln(8+t)}}\,dt$$

$= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\ln(8+t)}}{\sqrt{\ln(8+t)}+\sqrt{\ln(8-t)}}\,dt = \int_{-1}^{1} 1\,dt = 2$

$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\ln(8+t)}}{\sqrt{\ln(8+t)}+\sqrt{\ln(8-t)}}\,dt = 1$

10 曲线 $y=x^2+1$ 上一点 $A(3,10)$ 的切线 L 与该曲线及 y 坐标轴围成平面图形 D 求 D 绕 x 轴旋转所得到的体积



$y-10=6(x-3)$ $\qquad x-3=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$

$x=0 \quad y=-8$ $\qquad x=\frac{4}{3}$

$y=6x-$

$-y-10=6(x-3)$ $\qquad \pi\cdot 8^2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}$

$y=6x-8$ $\qquad \int_0^1 \pi(6x-8)^2dx+\int_1^{\frac{4}{3}}\pi(x^2+1)^2dx$

$\begin{cases}-y=6x-8\\ y=x^2+1\end{cases}$ $\qquad +\int_{\frac{4}{3}}^{3}\pi\left[(x^2+1)^2-(6x-8)^2\right]dx$

$8-6x=x^2+1$

$x^2+6x-7=0$

$(x+7)(x-1)=0$

$x=1$

$\begin{cases}y=6x-8\\ y=x^2+1\end{cases}$

$x^2+1=6x-8$

$x^2-6x+9=0$

设函数 $y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续可导，且满足

$$y(x)+\int_0^x \left(y(t)+\frac{1}{1+t^2+t^{2018}}-1\right)dt=0$$

求 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=$

$$y'(x)+y(x)+\frac{1}{1+x^2+x^{2018}}-1=$$

$$y'(x)+y(x)=-\frac{x^2+x^{2018}}{1+x^2+x^{2018}}$$

$$F(x)=y(x)e^x$$

$$F'(x)=(y'(x)+y(x))e^x$$

$$=-\frac{x^2+x^{2018}}{1+x^2+x^{2018}}e^x$$

$$F(x)=\int_0^x e^t\cdot\left(1-\frac{1}{1+t^2+t^{2018}}\right)dt$$

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^t\left(1-\frac{1}{1+t^2+t^{2018}}\right)dt}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{1}{1+x^2+x^{2018}}\right)}{e^x}=1$$

Memo No.
Date /

十二、某公司第n年获得的利润 x_n 满足 $x_1=2$，$x_2=3$，

$x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}x_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

$x_3=\sqrt{6}=6^{\frac{1}{2}}$

$x_4=(3\cdot 6^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}6^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{2}\cdot 1}\cdot 6^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}$ $(3\cdot 6^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

$x_5=(3^{\frac{1}{2}}6^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2^2}}6^{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}}$

$x_6=(3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}}6^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}}6^{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}}$

$x_7=(3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}})^{\frac{1}{2}}(6^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}})^{\frac{1}{2}}$ $x_2>x_3<x_4$

x_{n+2}

$=3^{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}}6^{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}}$

$x_8=3^{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}}6$ $x_{n+2}^2=x_{n+1}\cdot x_n$

$x_2=3^1$ $\dfrac{x_{n+2}}{x_{n+1}}=\dfrac{x_n}{x_{n+2}}$

$x_3=2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}$

$x_4=2^{\frac{1}{2^2}}3^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})}$ $x_n=x_2\cdot\dfrac{x_3}{x_2}\cdot\dfrac{x_4}{x_3}\cdots\dfrac{x_n}{x_{n-1}}$

$x_5=2^{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}}3^{\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}}$ $=x_2\cdot\dfrac{x_1}{x_3}\cdot\dfrac{x_2}{x_4}\cdot\dfrac{x_3}{x_5}\cdots\dfrac{x_n}{x_{n+2}}$

$x_6=2^{\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}}3^{\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{3}{2^4}}$

$x_7=2^{\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}}$ $=x_2^2\cdot x_1\cdot\dfrac{1}{x_{n+1}\cdot x_{n+2}}$

$18=a^3\Rightarrow a=\sqrt[3]{18}$